CORPORACIÓN

GIQ

Atalivar Sarmiento Ledesma
Lic. en Física y Matemáticas
Universidad del Valle

Ricardo Adolfo Díaz
Ing. Electrónico
Universidad Autónoma de Occidente

Juan Carlos Mendez ortiz
Lic. en Matemáticas y Computación
Universidad Antonio Nariño

Jose David Bonilla Meneses
Ing. Electricista
Universidad del Valle

Alexandra Melo
Ingeniera Electricista
Universidad Autónoma de Occidente

María Isabel García Cabezas
Lic. en Ciencias de la Educación
Universidad Santiago de Cali

Corporación GIQ

Sede Principal: Calle 10 Nº 62B-30 PBX: 485 11 99
Sede Norte: Av. 3N Nº 38N-19 PBX: 485 28 41

Actualiza esta Versión
http://corporaciongiq.edu.co

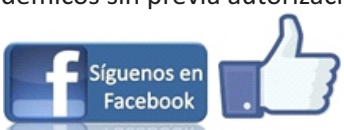
Versión XXIII
Febrero 3 de 2015

Diseño y Diagramación Digital Reading
Cali – Colombia

Este libro es una recopilación de los conceptos fundamentales impartidos durante el bachillerato, ha sido revisado y actualizado año tras año desde 1.990 por destacados docentes de la Corporación GIQ.

Docentes participantes en esta edición:
Lic. Atalivar Sarmiento Ledesma
Ing. Ricardo Adolfo Díaz
Lic. Juan Carlos Mendez ortiz
Lic. María Isabel García Cabezas
Ing. Alexandra Melo
Ing. Jose David Bonilla Meneses

Esta recopilación no tiene valor comercial, puede ser utilizado con fines académicos sin previa autorización.



Evolución del pensamiento matemático desde el hombre primitivo hasta Einstein

Los matemáticos que ilustran este mural representan las bases de las matemáticas, siendo los que construyeron y fortalecieron la concepción que actualmente se tiene de las matemáticas, fueron personas sensibles a la problemática en su tiempo, cuyos conocimientos son básicos en la era actual, la historia de las matemáticas es la expresión más inteligente del ser humano en la búsqueda del bienestar común, auxiliando a otras ciencias como la Química, la Física, Astrofísica, Ingeniería Genética, etc., que nos proveen de los satisfactores de la vida moderna.

Autor: Prof. Adolfo López Miranda

TOMADO DE www.ith.mx/img/mural3HM.jpg

TABLA DE CONTENIDO

MATEMÁTICA

UNIDAD 1

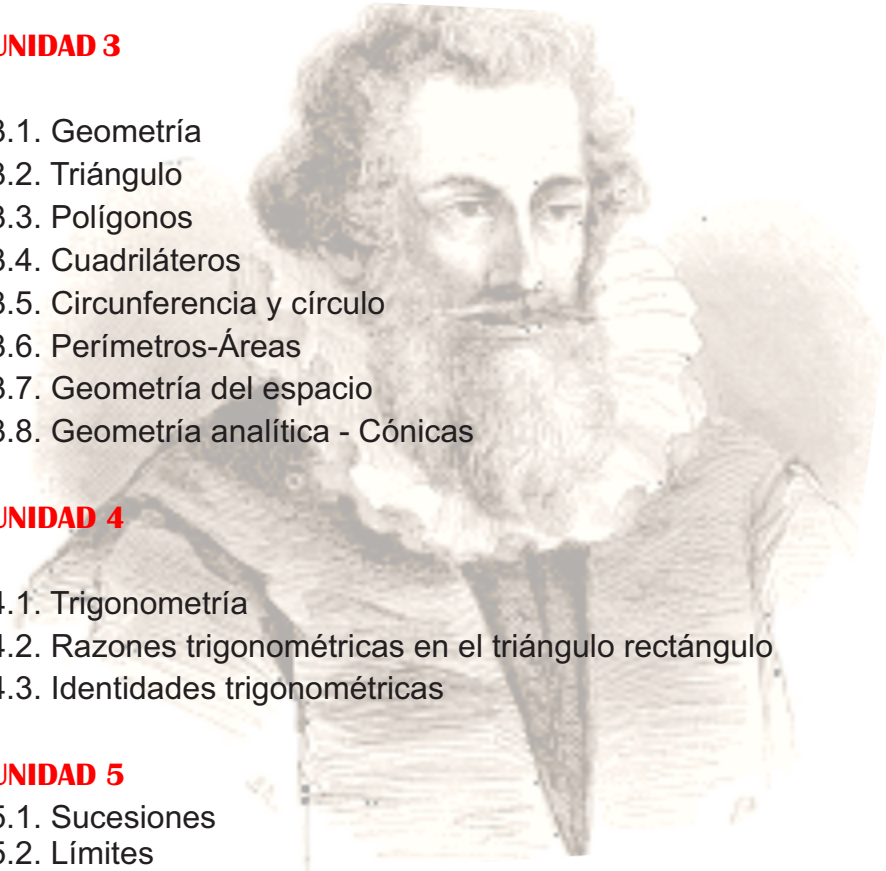
1.1. Números naturales
1.2. Números enteros
1.3. El conjunto de los números racionales
1.4. Números decimales
1.5. El conjunto de los números irracionales
1.6. El conjunto de los números reales
1.7. El conjunto de los números complejos
1.8. Razones y proporciones
1.9. Porcentaje e interés

UNIDAD 2

2.1. Clasificación de las expresiones algebraicas
2.2. Cálculo algebraico
2.3. Productos notables y factorización
2.4. Ecuaciones de primer grado con una incógnita
2.5. Interpretación algebraica de enunciados verbales
2.6. Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas
2.7. Desigualdades
2.8. Potenciación
2.9. Radicación
2.10. Ecuación de segundo grado con una incógnita
2.11. Casos simples de sistemas cuadráticos de dos ecuaciones con dos variables

2.12. Ecuaciones irracionales reducibles a ecuaciones de primer grado
2.13. Ecuaciones exponenciales
2.14. Función logarítmica

UNIDAD 3



3.1. Geometría
3.2. Triángulo
3.3. Polígonos
3.4. Cuadriláteros
3.5. Circunferencia y círculo
3.6. Perímetros-Áreas
3.7. Geometría del espacio
3.8. Geometría analítica - Cónicas

UNIDAD 4

4.1. Trigonometría
4.2. Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo
4.3. Identidades trigonométricas

UNIDAD 5

5.1. Sucesiones
5.2. Límites

UNIDAD 6

6.1. Estadística descriptiva
6.2. Probabilidad
6.3. Técnicas de Conteo

INTRODUCCIÓN

En este manual usted encontrará una breve descripción de temas, en el área de Matemáticas, como parte de los varios elementos de nuestro programa de Pre-ICFES, con ellos se propende hacia el logro de nuestro principal objetivo, un puntaje significativamente alto de todos y cada uno de nuestros estudiantes en la prueba de estado ICFES.

Las matemáticas influyen en casi todas las profesiones y cada día aumenta el número de actividades que recurren a ellas. Ésta es una razón válida y fuerte por la cual esta asignatura siempre ha producido en los estudiantes grandes inquietudes y también sobre la cual muchas instituciones de educación superior, se basan para hacer el proceso de admisión.

En el manual de matemáticas usted encontrará conocimiento básico conjugado con una gran parte de aptitud y aplicabilidad. Para alcanzar el éxito le aconsejamos asistir a todas las clases, leer el manual desarrollando los ejemplos y ejercicios que allí se plantean, solucionar los talleres y presentar oportunamente los preconceptos.

CORPORACION GIQ

UNIDAD 1

NÚMEROS NATURALES

UNIDAD 1

Dos amigos que visitan una finca observan un conejo que hace un recorrido de 60metros, avanzando 4 metros por cada tres saltos que realiza. Los amigos concluyen que el recorrido lo hace dando 45 saltos. La anterior afirmación es....

1. - NUMEROS NATURALES

El conjunto de los números naturales, designado por IN, está formado por:

IN = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,...}

El nombre de naturales proviene seguramente debido a que estos números son los que aparecen por primera vez en el proceso natural de contar o enumerar los objetos de un conjunto. Los símbolos 1, 2, 3, etc. se llaman numerales hindú –arábigos, porque fueron inventados por los hindúes e introducidos en Europa y en Occidente por los árabes.

Conceptos asociados al conjunto de los números naturales

1.1 Factores o divisores y múltiplos de un número.

Si a, b y c son números naturales que cumplen la relación **c = a · b**, entonces decimos que a y b son factores o divisores de c. En tal caso **c** se dirá múltiplo de a y b

Ejemplos:

1) 5 y 7 son factores de 35, pues 5 .7 = 35; 35 es múltiplo de 5 y de 7.

2) 3 es un factor de 9, pues 3 . 3 = 9; 9 es múltiplo de 3.

En muchas ocasiones, es necesario saber si un número natural divide a otro, sin necesidad de efectuar la división. Para ello se aplican las siguientes cómodas reglas o criterios de divisibilidad en IN.

Reglas de divisibilidad en IN

Un número natural es divisible por.

2: si termina en cero o en cifra par.
3: si la suma de los valores de sus cifras es múltiplo de 3.
4: si el número formado por sus dos últimas cifras es 00 o es múltiplo de 4.
5: si termina en 0 o en 5.
6: si lo es por 2 y por 3 a la vez.
8: si el número formado por sus tres últimas cifras es 000 o es múltiplo de 8.
9: si la suma de los valores de sus cifras es un múltiplo de 9.

A usted podrá haberle llamado la atención que no hemos puesto la regla de divisibilidad por 7. Esto se debe a que la complejidad

de dicha regla la hace ser poco práctica y es más fácil hacer directamente la división para saber si el número es o no múltiplo de 7.

1.2 Números primos y compuestos

1.2.1 Número Primo

Un número natural p > 1 es primo si y sólo si sus únicos factores son exactamente p y 1.

El conjunto de los números primos es

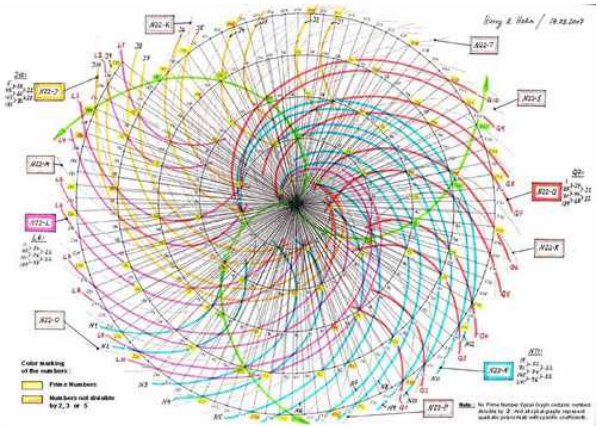
P = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29,...}

Euclides, matemático griego del siglo III a.c, fue el primero en demostrar que no hay un número primo más grande que todos los demás. Es decir, la sucesión de los números primos es infinita.

1.2.2 Número Compuesto

Un número natural n > 1 es compuesto si y sólo si él no es primo.

Nota: *El 1 no es primo ni compuesto.*



Teorema Fundamental de la Aritmética

Todo número compuesto se puede descomponer de manera única como producto de números primos (salvo el orden de los factores).

Ejemplos:

Descomponer los números 87, 105 en sus factores primos.

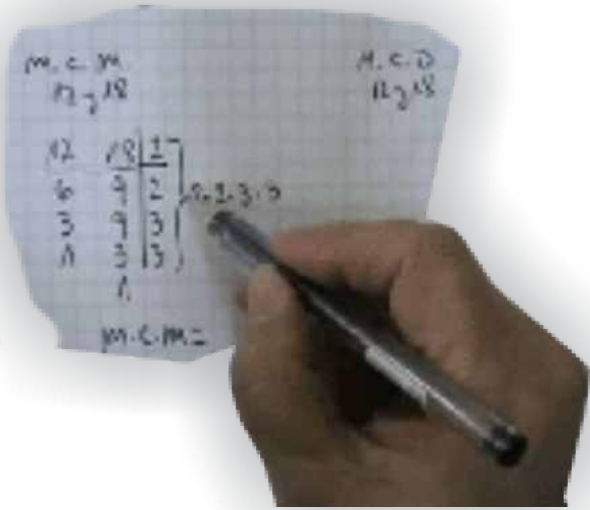
Solución*:*

a) Puesto que 8 + 7 = 15, ¡múltiplo de 3!, 87 también lo es. Efectuando la división, el otro factor es 29, el cual es primo. Luego: 87 = 3 . 29

b) Como 105 termina en 5, es divisible por 5.

c) Luego 105 = 5 . 21 = 5 . 3 . 7

1.3 Máximo Común divisor



El máximo común divisor (M.C.D) de un conjunto de números naturales es el mayor número natural que divide a cada uno de los números dados.

Ejemplo:

Determinar el M.C.D. entre 48, 56, 64.

Solución:

Primer método

Formemos el conjunto de los divisores de cada uno de los números dados, a los cuales podemos identificarlos de la siguiente manera: D(48) como el conjunto de los divisores de 48, etc.

$D(48) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$
$D(56) = \{1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56\}$
$D(64) = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$

Formemos el conjunto de los divisores comunes, es decir, la intersección de los conjuntos anteriores:

$D(48) \cap D(56) \cap D(64) = \{1, 2, 4, 8\}$

El mayor de ellos es 8, el cual es el m.c.d. buscado.

Es importante destacar el hecho que el conjunto de los divisores de un número natural, por grande que él sea, es siempre finito.

Segundo método

I. Se descompone cada número en sus factores primos.

$48 = 2^4 . 3$
$56 = 2^3 . 7$
$64 = 2^6$

II. Se eligen los factores primos comunes con sus menores exponentes.

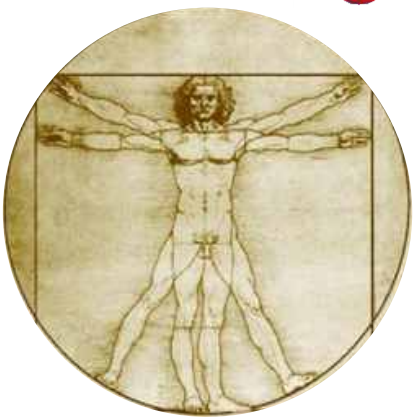
$$2^3$$

III. Dicho factor, si es que hay uno solo, o el producto de dichos factores, si es que hay más de uno, es el m.c.d. buscado. En nuestro caso es:

$$2^3 = 8$$

Puede ocurrir, en la búsqueda del m.c.d. Entre varios números, que ellos tengan sólo el factor común 1. En tal caso, se habla de números primos relativos o primos entre sí.

1.4 Mínimo común múltiplo



El mínimo común múltiplo (M.C.M.) de un conjunto de números naturales es el menor natural que es múltiplo de cada uno de los números dados.

Ejemplo:

Determinar el M.C.M. entre 6, 9 y 12.

Solución:

Primer método

Formemos el conjunto de los múltiplos de cada uno de los números dados, a los cuales podemos identificarlos de la siguiente manera: M(6) como el conjunto de los múltiplos de 6, etc.

M (6) = { 6 , 1 2 , 1 8 , 2 4 , 3 0 , 3 6 , 4 2 , 4 8 , 5 4 , 60,66,72,78,84,90,96,102,108, ...}

M (9) = { 9 , 1 8 , 2 7 , 3 6 , 4 5 , 5 4 , 6 3 , 7 2 , 8 1 , 9 0 , 99,108,117,126,135,144, ...}

M(12)={12,24,36,48,60,72,84,96,108, 120,132,144, ...}

Formemos el conjunto de los múltiplos comunes, es decir, la intersección de los conjuntos anteriores:

$M(6) \cap M(9) \cap M(12) = \{36, 72, 108, ...\}$

El menor de ellos es 36, el cual es el M.C.M. buscado.

Segundo método

I. Se descompone cada número en sus factores primos.

$6 = 2 \cdot 3$

$9 = 3^2$

$12 = 2^2 \cdot 3$

II. Se eligen los factores primos distintos con sus mayores exponentes.

2^2 y 3^2

III. El producto de dichos factores es el M.C.M. buscado. En nuestro caso es:

$2^2 \cdot 3^2 = 36$

Observación: Existen muchos métodos para calcular por escrito el mínimo común múltiplo de un conjunto de números naturales, así como también métodos para calcular el máximo común divisor entre varios números: consultar, por ejemplo, Aritmética de Baldor. Sin embargo, dichos métodos conviene aplicarlos cuando no se puedan calcular mentalmente el M.C.D y el M.C.M. entre los números, es decir, cuando los números sean muy grandes para el que los está calculando. Recomendamos al estudiante ejercitar el cálculo mental – especialmente en esta época de calculadoras y computadoras- pues los ejercicios de este manual están a su alcance con la debida práctica.

El concepto de mínimo común múltiplo (M.C.M.) se extiende a los números enteros Z, con el resultado que M.C.M. entre varios números enteros es siempre **positivo.**

Así por ejemplo, el M.C.M. entre –2 y 6 es **6**

2. - NÚMEROS ENTEROS

El conjunto de números enteros se designa por **Z**,del alemán Zahl: número, y está formado por:

$Z = \{...,-4,-3,-2,-1, 0, 1, 2, 3, 4,...\}$
El conjunto Z es la unión de tres conjuntos disjuntos:

$Z = Z^- \cup \{0\} \cup Z^+$ $[Z^- \cap \{0) \cap Z^+ \neq \varnothing\}$

Donde:

Z^- es el conjunto de los números enteros negativos.

$Z^- = \{-1, -2, -3,...\}$,
$\{0\}$ es el conjunto cuyo único elemento es el cero y
Z^+ es el conjunto de enteros positivos:
$Z^+ = \{1, 2, 3,...\}$ = números naturales.

2.1 Valor Absoluto

Notemos que todo número entero se caracteriza por dos elementos: valor absoluto o numérico y signo.

Ejemplos:

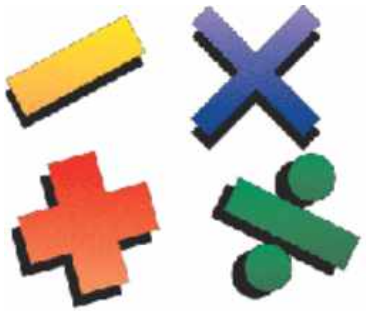
1) En el entero –9, el valor absoluto es 9 y el signo es negativo (-).

2) En el entero 13, el valor absoluto es 13 y el signo es positivo (+).

3) En el entero 0, el valor absoluto es 0 y, en este caso, no tiene signo.

Notación: *Las palabras "valor absoluto" se abrevian por medio de dos barras verticales entre las cuales se coloca el número. De tal modo que los ejemplos anteriores se anotan así:*

| -9 | = 9; | 13 | = 13 y | 0 | = 0
La propiedad más importante es que
I x I > 0, V x ϵ Z



2 Operaciones básicas

2.2.1 Suma y Resta

Signos Iguales: Se suman los valores numéricos y se coloca el signo que llevan.

Ejemplo:

a) $7 + 16 = 23$
b) $-10 - 16 = -26$
c) $6 + 11 + 19 = 36$
d) $-8 - 18 - 15 = -41$

Signos diferentes: Al sumar dos números de diferentes signos, se restan los valores numéricos y se coloca el signo del que tiene mayor valor numérico.

Ejemplo:

a) $-9 + 15 = 6$
b) $-27 + 12 = -15$
c) $(9 + 6 + 7) - (7 + 8 + 4) = 22 - 19 = 3$
d) $(11 + 4 + 7) - (16 + 8 + 9) = 22 - 33 = -11$

2.2.2 Multiplicación y División

	Multiplicación	División	Nemotécnico
Ley de Signos	(+)x(+) = +	+/+ = +	Dos signos iguales siempre da (+)
	(-)x(-) = +	-/+ = -	
	(-)x(+) = -	-/+ = -	Dos signos diferentes siempre da (-)
	(+)x(-) = -	+/- = -	

Ejemplo: Numérico

a) (-7) (8) = -56
b) (-9) (-12) = 108

3. - EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

¿Existe algún número entero que multiplicado por 2 sea igual a 1?

En general, dados dos enteros m y n cualquiera, ¿existe un número entero x que multiplicado por n ($n \neq 0$) sea igual a m?

Las respuestas negativas a estas preguntas obligan a los matemáticos a una ampliación del conjunto Z, introduciendo un nuevo conjunto numérico llamado conjunto de los **números racionales.** Se representan por Q (del inglés quotient: couciente) y se define como:

$$Q=\{r/r = [\frac{a}{b}], a \in Z, b \in Z\ b \neq 0\}$$

Un número racional es un número que puede expresarse en forma $\frac{a}{b}$

entre dos enteros **a** y **b**, con $\mathbf{b \neq 0}$.

A se llama numerador y **b** se llama denominador.

3.1 Equivalencia de números racionales

Dadas dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$

diremos que ellas representan un mismo número racional, o sea, son equivalentes entre sí, (si y sólo si) ad = bc.

$\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ $\Leftrightarrow$ ad = bc

Según esta definición tenemos:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, pues 9. 4 = 12. 3

36 = 36

$\frac{5}{7} \neq \frac{20}{21}$, pues 5x21 ≠ 7x20

108 ≠ 140

3.1.1 Amplificación

$\frac{a}{b} \neq \frac{ak}{bk} \Leftrightarrow$ a (bk) = b(ak) $\forall$ k ϵ Z, k≠0

Ejemplos:

a) $\frac{4}{5} = \frac{28}{35}$ (se amplificó por 7)

b) $\frac{4}{5} = \frac{-4}{-5}$ (se amplificó por -1)

Importante!

c) $\frac{-7}{3} = \frac{7}{-3}$ (se amplificó por -1)

d) $\frac{9}{-11} = \frac{-99}{121}$ (¿por cuánto se amplificó?)

Expresar en palabras el significado de esta operación.

3.1.2 Simplificación

$$\frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k} \quad \forall k \in Z,\ k \neq C$$

Ejemplos:

a) $\frac{12}{28} = \frac{3}{7}$ (se simplificó por 4)

b) $\frac{75}{93} = \frac{25}{31}$ (se simplificó por 3)

c) $\frac{-36}{-81} = \frac{4}{9}$ (se simplificó por -9)

d) $\frac{51}{-34} = \frac{-3}{2}$ (¿p or cuánto se simplificó)

Expresar en palabras el significado de esta expresión.

Notas:

1) Mientras que la amplificación de una fracción es una operación siempre posible, la simplificación solamente se puede efectuar cuando ambos términos tienen un factor común.

2) Al simplificar una fracción por el M.C.D. de sus dos términos se obtiene de inmediato la fracción más simple posible. Dicha fracción se llama fracción irreductible.

3.2.1. Adición

$\forall \frac{a}{b} y \frac{c}{d} \varepsilon$ Q:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Ejemplos:

a) $\frac{4}{7} + \frac{5}{9} = \frac{4*9 + 7*5}{7*9} = \frac{36 + 35}{63} = \frac{71}{63}$

b) $\frac{-2}{3} + \frac{5}{8} = \frac{-2*8 + 3*5}{3*8} = \frac{-16 + 15}{24} = -\frac{1}{24}$

3.2 Multiplicación

$\forall \frac{a}{b} y \frac{c}{d} \varepsilon$ Q:

$$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Ejemplos:

a) $\frac{7}{11} + \frac{8}{5} = \frac{7*8}{11*5} = \frac{56}{55}$

b) $\frac{-9}{10} * \frac{40}{27} = \frac{-9*40}{10*27} = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}$

3.2 Operaciones básicas en Q.

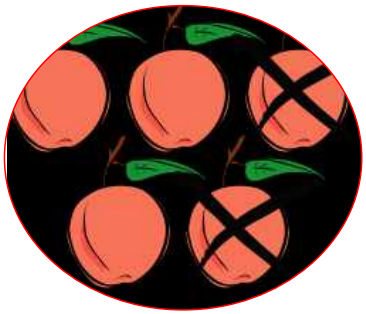
Definamos las operaciones básicas de adición, multiplicación, resta y división de números racionales.

Observación: Dado que todo número entero k se puede escribir en la forma $\frac{K}{1}$

el conjunto Z está incluido en Q: $Z \subset Q$.

3.2.3 Sustracción

$\forall \frac{a}{b} y \frac{c}{d} \varepsilon$ Q:



$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ab}{bd} + \left(-\frac{c}{d}\right)$$

[Recuerde que $-\frac{c}{d} = \frac{-c}{d}$]

$$= \frac{ad + b(-c)}{bd}$$

[Definición de adición en Q]

$$= \frac{ad - bc}{bd}$$

[Recuerde que b (-c) = bc, en Z]

Por lo tanto, la definición de sustracción en Q es equivalente a:

$\forall \frac{a}{b} y \frac{c}{d} \varepsilon$ Q:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

Ejemplo:

$$\frac{5}{6} - \frac{10}{11} = \frac{5*11 - 6*10}{6*11} = \frac{55 - 60}{66} = \frac{-5}{66} = -\frac{5}{66}$$

$\forall \frac{a}{b} y \frac{c}{d} \varepsilon$ Q:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} * \left(\frac{c}{d}\right)^{-1}$$

[Recuerde que $\left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{d}{c}$]

$$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

[Definición de multiplicación en Q]

Por lo tanto, la definición de división en Q es equivalente a:

$$\frac{3}{7} \div \frac{5}{4} = \frac{3}{7} * \frac{4}{5} = \frac{12}{35}$$

$0,57 = \frac{57}{100}$ (cincuenta y siete centésimos)

4.1 Operaciones con números decimales

Las operaciones básicas con números decimales se reducen simplemente a operaciones con fracciones cuyo denominador es un potencia de 10. Por lo tanto, para la suma y la resta sólo hay que colocarlos en columnas y luego alinearlos con respecto a la coma decimal.

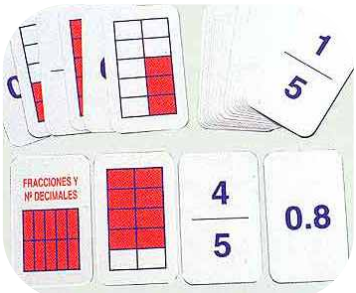
4.1.1 Adición y Sustracción de Decimales

Ejemplos:

a) Encontrar la suma de 5,73; 0,042 y 271,746

Solución

```
  5,73
  0,042
271,746
277,518
```



b) De 35,048 restar 26,12

Solución

```
 35,048
-26,12
  8,928
```

4.1.2 Multiplicación de Decimales

Se multiplican como si fuesen enteros y enseguida se separan tantas cifras decimales en el producto, como la suma de las cifras decimales de los factores.

Ejemplo:

Encontrar el producto entre 2,75 y 0,73

Solución

$$\begin{array}{r} 2{,}75 \\ *0{,}73 \\ \hline 82{,}5 \\ +1{,}925 \\ \hline 2{,}0075 \end{array}$$

4.1.3 División de Decimales

Se amplifica la división por una adecuada potencia de 10 de tal modo que el **divisor sea entero**.

Ejemplos:

a) Encontrar el cociente entre 0,0428 y 0,005

Solución

0,0428 ÷ 0,005 (se amplifica la división por 1.000) 42,8 ÷5 = 8,56
Luego 0,0428 ÷ 0,005 = 8,56

b) Determinar 2,304 ÷ 0,0096

Solución

2,304 ÷ 0,0096(Ahora amplificaremos por 10.000)

23040÷ 96 = 240
Luego 2,304 ÷ 0,0096 = 240

4.2 Decimales Periódicos

Al transformar una fracción común a un número decimal puede suceder que la división no termine y se produzca la repetición de una o más cifras en el cociente. En tal caso, decimos que estamos ante la presencia de un número decimal periódico.

a) $\frac{2}{3}$=0,666… (6 es el período)

La forma de abreviar la equivalencia anterior es:

$$\frac{2}{3} = 0,\overline{6}$$

b) $\frac{4}{11}$= 0,363636… = $0,\overline{36}$

c) $\frac{107}{55}$= 1,9454545… = $1,9\overline{45}$

(45 es el período y 9 el anteperíodo)
Hemos visto que una fracción común $\frac{a}{b}$ ha dado origen a decimales exactos o finitos (por ejemplo:

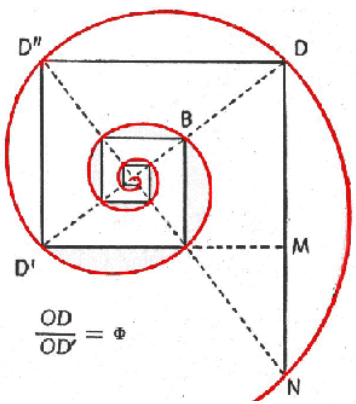
$\frac{15}{10}$=1,5; $\frac{37}{100}$=0,37

etc.) y viceversa. Ahora vemos cómo la fracción $\frac{a}{b}$ ha dado origen a decimales periódicos. Pues bien, se plantea la siguiente pregunta (plantéesela usted también): ¿todo desarrollo decimal periódico corresponderá a algún número racional?

La respuesta a esta pregunta es afirmativa, aunque nosotros no lo demostremos. Sin embargo, en vez de dar las típicas reglas para la conversión de un decimal periódico o fracción común, lo haremos por un procedimiento razonado muy sencillo. Dicho procedimiento permitirá al lector deducir por sí mismo las conocidas reglas de transformación de números decimales a fracciones comunes de la forma $\frac{a}{b}$

Representación Racional de un número Decimal Periódico

A continuación veremos cómo es posible expresar un desarrollo decimal periódico en la forma de fracción común equivalente $\frac{a}{b}$



Ejemplos

Sea (1):

$x=0,\overline{6}$

$x=0.666$

Restando (2) – (1):10x – x =
$6,\overline{6} - 0,\overline{6}$ = 9x=6

De donde: x = $\frac{6}{9}$ó$\frac{2}{3}$

b) Consideremos el decimal periódico $0,\overline{36}$

Sea (1): x = $0,\overline{36}$

Entonces (2): 100x = $36,\overline{36}$
100x = 36.363636…

Restando (2) – (1): 100x – x =
$36,\overline{36}$ - $0,\overline{36}$
99x = 36

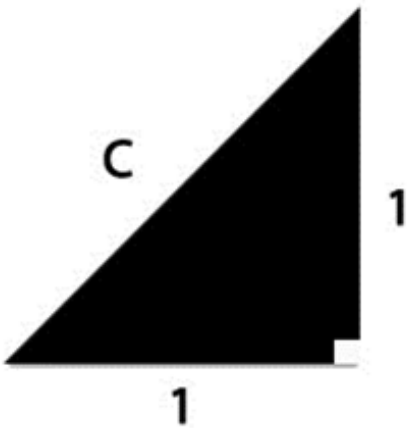
de donde: x = $\frac{36}{99}$ó$\frac{4}{11}$

¿Puede usted mismo deducir la "regla"?

5. EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Hay diversas maneras de introducir los números irracionales. Nosotros lo haremos geométricamente, respetando la tradición histórica, pues fueron los matemáticos griegos de la escuela Pitagórica (siglo V a.C.) los primeros en descubrirlos o mejor dicho, de tomar conciencia de su existencia. Recordemos el teorema de Pitágoras: "*En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es equivalente a la suma de los cuadrados de los catetos".*

Apliquémoslo para encontrar la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles, de catetos iguales a 1 (una unidad de medida cualquiera, por ejemplo, un decímetro). En la figura se tiene:



$C^2 = 1^2 + 1^2$
$C^2 = 1 + 1$
$C^2 = 2$

El valor de la hipotenusa C se escribe a través de la siguiente notación:

$C = \sqrt{2}$, se lee ce es igual a la raíz cuadrada de dos.
El símbolo anterior nos pregunta: ¿qué número es aquel que elevado al cuadrado nos da 2?

Es fácil ver que C está comprendido entre 1 y 2:

$1 < \sqrt{2} < 2$

Ahora bien, mejorando esta aproximación por medio del algoritmo de cálculo, de la raíz cuadrada de un número o bien con ayuda de la calculadora, resulta:

$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$
$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}415$
Aún más $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$

Y así sucesivamente podríamos seguir este proceso de acercarnos cada vez más y más a $\sqrt{2}$ mediante números decimales y nunca lo lograríamos porque $\sqrt{2}$ no es un número decimal que corresponda a algún número racional. Más bien, la $\sqrt{2}$ define ella misma una nueva clase de número llamada número irracional. Cuando se descubrió este hecho en la época ya indicada, esto produjo la crisis del Pitagorismo, pues se creía que con los números racionales se podían medir todas las magnitudes.

Otros ejemplos donde aparecen números irracionales son los siguientes:

a) La altura de un triángulo equilátero de lado 2 es $\sqrt{3}$

b) La arista de un cubo cuyo volumen es 2 es $\sqrt[3]{2}$

c) La razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro respectivo es:

π ($\pi \approx 3{,}1415926535$ etc.)

Con estos ejemplos queremos mostrar que hay una infinidad de números irracionales (no racionales) e incluso se podría "inventar" nuevos números irracionales sin acudir a la geometría.

Decimales infinitos no periódicos

La característica de los números irracionales es precisamente la de que su representación decimal es **no periódica.**

$\sqrt{2} \approx 1{,}41421356\ldots$ e = $2{,}71828182\ldots$[2]

$\pi \approx 3{,}14159265\ldots$ $\sqrt{3} \approx 1{,}73205080\ldots$

Q	I
$3\frac{1}{5}$	$\log 2$
	$\sqrt{2}$ e
	$\sqrt[3]{2\pi}$
0,07 $-\frac{1}{5}$	0,101001...
	$\sqrt{3}$
0,666	

$$\mathbb{R} = Q \cup I$$

El conjunto de los números reales, al igual que Q, es denso en la recta numérica.

Esto es, entre dos números reales cualesquiera existe otro número real y por ende infinitos.

Ejemplo:

Entre $\sqrt[3]{2}$ $\sqrt{3}$ se pueden intercalar infinitos números irracionales:

$$\sqrt{2}<\sqrt{2,1}<\sqrt{2,11}<\sqrt{2,111}< \ldots \sqrt{3}$$

Con los números reales la recta numérica está completa.

Esto quiere decir que entre los números reales y los puntos de la recta numérica, existe una correspondencia biunívoca, es decir, a cada número real le corresponde un punto de la recta numérica y viceversa.

7. EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

¿Existe algún número real cuyo cuadrado sea igual a –1?

Ciertamente no, pues es fácil demostrar que el cuadrado de cualquier número real es siempre no negativo. Con el objeto de subsanar esta deficiencia del conjunto de los números reales es necesario introducir un nuevo "ente" matemático tal que su cuadrado sea igual a –1.

Este nuevo "ente" se llama **unidad imaginaria** y se representa por i, de tal modo que $\mathbf{i^2 = -1}$. Los "múltiplos" de **i**, de la forma **bi**, siendo "b" un número real, se llaman números imaginarios puros y las combinaciones entre números reales y números imaginarios puros, de la forma **a + bi,** se llaman números complejos.

8. RAZONES Y PROPORCIONES

8.1. Razones

Imaginémonos que dos niños, Alberto y Nicolás, tienen $ 8.000 y $10.000, respectivamente. Al comparar estas cantidades podemos decir que Nicolás tiene $ 2.000 más que Alberto. Sin embargo, esta diferencia no resultaría ser significativa si las cantidades de dinero fueran muy grandes. Otra forma en que podemos compararlas es mediante la división, es decir:

$$\frac{8.000}{10.000} = \frac{4}{5},$$

luego de la simplificación.

Esto nos dice que por cada $4 que tiene Alberto, Nicolás tiene $5.

También es posible interpretarlo diciendo que la cantidad de dinero de Alberto, es múltiplo de 4 y la cantidad de dinero de Nicolás es múltiplo de 5.

¿Puede ud. dar otra interpretación?

Definición

Llamaremos razón entre dos cantidades **a** y **b** a la comparación de ellas por división.

Notación

La razón entre a y b se escribe:

$\frac{a}{b}$ bien a: b

En ambos casos se lee: "**a** es a **b**"

Los elementos que forman la razón se llaman antecedentes y consecuentes. Siendo a, el antecedente y b, el consecuente.

Observe que el antecedente y el consecuente corresponden al numerador y denominador de una fracción respectivamente.

Ejemplos:

a) Si Juan tiene 10 años y Pedro tiene 20 años, entonces la razón entre la edad de Juan y la edad de Pedro es:

$$\frac{J}{P} = \frac{10\ Años}{20\ Años} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

La razón $\frac{1}{2}$ indicaque la edad de Juan, es la mitad de la edad de Pedro. ¿Cuál es la razón entre la edad de Pedro y Juan?

b) Si un automóvil recorre una distancia de 100 Km en 2 horas, entonces la razón entre la distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerla es:

$$\frac{100\text{km}}{2\text{hr}} = 50\frac{Km}{hr}$$

¿Recuerda ud. que esta razón se llama rapidez media?

¿Tiene sentido la razón inversa?

Al simplificar la fracción $\frac{10}{20}$ para obtener $\frac{1}{2}$ nos encontramos con dos razones que tienen el mismo valor. Es decir, estamos frente a una proporción.

Definición:

Llamaremos proporción a la igualdad de dos razones.

Notación:

Si las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son iguales, entonces la igualdad $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se anota también así: a **:** b = c **:** d.

En ambos casos se lee: **"a** es a **b** como **c** es a **d"**

En la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

los términos a y d son los extremos y los términos b y c son los medios.

Teorema: Propiedad fundamental de toda proporción

En toda proporción, el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

$$\text{Con } b \neq 0 \text{ y } d \neq 0$$

Ejemplo:

¿Forman proporción las razones

$$\frac{33}{39} \text{ y } \frac{44}{52}?$$

Veamos, aplicando el teorema anterior tenemos:

$$\frac{33}{39} y \frac{44}{52} \Leftrightarrow 33 * 52 = 44 * 39$$

8.2.1 Proporción Discontinua

Una proporción cuyos términos son todos distintos se llama proporción discontinua.

Ejemplo:

$$3 : 2 = 6 : 4$$

Cada uno de sus términos se dice que es una cuarta proporcional entre los otros tres.

Para calcular una cuarta proporcional es necesario conocer los otros tres términos y sus posiciones relativas en la proporción.

8.2.2 Proporción continua

Una proporción cuyos términos medios o extremos son iguales (se repiten) se llama proporción continua.

El término repetido se llama media proporcional y cada uno de los términos no repetidos se llama tercera proporcional.

Ejemplo.

2 : 4 = 4 : 8 es una proporción continua.

Para calcular una tercera proporcional hay que conocer los dos términos restantes, pues uno de ellos debe repetirse.

8.3 Proporcionalidad directa e inversa; Propiedades

8.3.1 Proporcionalidad directa

Dadas dos magnitudes X y Y, diremos que X, es directamente proporcional a Y, o que X, varía proporcionalmente a Y, sí y sólo sí la razón entre un valor cualquiera de X, y el correspondiente valor de Y, es constante.

Notación

Si X, es directamente proporcional a Y, esto se simboliza así:

$$X \propto Y \Leftrightarrow \frac{33}{39} = k$$

Ejemplo:

Repartir $200.000 entre Juan y Pedro en razón directa de sus edades que son 15 y 25 años, respectivamente.

Solución:

Sean J y P, las partes que corresponden a Juan y Pedro, respectivamente, luego:

$$\frac{J}{P} = \frac{15}{25} \text{ y } J + P = 200.000$$

Alternando medios en la proporción, se tiene que:

$$\frac{J}{15} = \frac{P}{25} = k \Leftrightarrow J = 15k \text{ y } P = 25k$$

Sustituyendo valores J = 15k y P = 25k en J + P = 200.000, se obtiene:

$$\begin{aligned} 15k + 25k &= 200.000 \\ 40k &= 200.000 \\ K &= 5.000 \end{aligned}$$

Luego, a Juan le corresponde J = 15 x 5.000 = $75.000 y a Pedro le corresponde P = 25 x 5.000 = $125.000.

El total es: $75.000 + $125.000 = $200.000.
Observa que al de mayor edad le corresponde más dinero.

8.3.2 Proporcionalidad inversa

Dadas dos magnitudes X, y Y, diremos que X es inversamente proporcional a Y o que X, varía inversamente con Y, sí y sólo sí el producto entre un valor cualquiera de X y el correspondiente valor de Y, es constante.

Notación:
Si X es inversamente a proporcional a Y, esto se simboliza así:

$$X \propto \frac{1}{Y} Y \Leftrightarrow XY = k$$

Ejemplo:

Si dos operarios demoran veinte días en realizar un trabajo, ¿cuántos días demoran cinco operarios en realizar el mismo trabajo?

Solución:

La variable número de operarios (N) y número de días (D) son inversamente proporcionales, luego N .D = k (constante)

En nuestro caso tendremos: 2 * 20 = 5 ***x**, donde **x** = 8.
Por lo tanto, 5 operarios demoran 8 días en realizar el mismo trabajo.

8.3.3 Proporcionalidad compuesta

Un problema clásico de proporcionalidad compuesta es el siguiente:

Si 18 obreros realizan un trabajo en 30 días, trabajando 8 horas diarias, ¿cuántos días tardan en hacer el mismo trabajo 15 obreros trabajando 9 horas diarias?

Una forma directa de resolver el problema es la siguiente:

Si llamamos N al número de obreros, D al número de días y H al número de horas diarias de trabajo, entonces.

Se iguala la razón que corresponde a la incógnita, con el producto de las razones directas o inversas que corresponden a las otras variables, es decir:

$$\frac{30}{X} = \frac{15}{18} * \frac{9}{8}$$

Razones inversas, ya que D con N y D con H son inversamente proporcionales respectivamente.

$$15 * 9 * x = 30 * 18 * 8$$

$$x = \frac{30*18*8}{15*9}$$

$$x = 32 \text{ días}$$

9. PORCENTAJE E INTERÉS

9.1 Porcentaje o tanto por ciento

Consideremos la siguiente situación: una persona invierte $100.000 en un negocio. Al cabo de cierto tiempo retira $120.000. Su utilidad es de $20.000. Esto significa que por cada $100.000 invertidos ha ganado $20.000 o lo que es lo mismo por cada $100 invertidos ha ganado $20.

Esto se abrevia diciendo que su utilidad ha sido del veinte por ciento.

Definición:

Un porcentaje o tanto por ciento es una fracción con denominador constante e igual a cien.

De acuerdo con la definición, para calcular el tanto por ciento de una cantidad, calculamos la fracción decimal correspondiente a dicha cantidad.

Ejemplo:

a) ¿Cuánto es el 5% de 30?

Solución

$$5\% \text{ de } 30 = 5/100 \,.\, 30 = 1{,}5$$

b) Dos personas A y B tienen un capital de $800.000, y A aportó el 40% de este capital. Todo el capital se invierte en la compra de mercadería y gastos de administración. El primer mes se vende toda la mercadería en $1.000.000.
Entonces:

i) ¿Qué cantidad aportó B?

ii) ¿Qué tanto por ciento se ganó en la venta?

iii) ¿En cuánto deberían vender la mercadería para que el 10% de la ganancia total fuese $50.000?

Solución:

i) Como A aportó el 40% del capital, entonces B aportó lo que falta para completar el 100%, es decir el 60%. Luego, debemos calcular el 60% de $800.000:

$$\frac{60}{100}=\frac{x}{800.000} \Rightarrow x = \frac{60x800.000}{100} = 480.000$$

De tal modo que B aportó $480.000.

ii) La utilidad del negocio es igual a:

Venta – Costo = Utilidad

$1.000.000 - $800.000 = $200.000

Ahora tenemos que calcular qué tanto por ciento es $200.000 de $800.000.

$$\frac{x}{100}=\frac{200.000}{800.000} \Rightarrow x = \frac{100x200.000}{800.000} = 25$$

Por lo tanto, la utilidad es un 25% del capital invertido.

iii) Tenemos que calcular la cantidad de la cual $50.000 es el 10%:

$$\frac{10}{100}=\frac{50.000}{x} \Rightarrow x = \frac{100x50.000}{10} = 500.000$$

Por lo tanto, la ganancia total sería $500.000.

Luego la mercadería debería venderse en $800.000 + $500.000 = $1.300.000.

9.2 Interés Simple

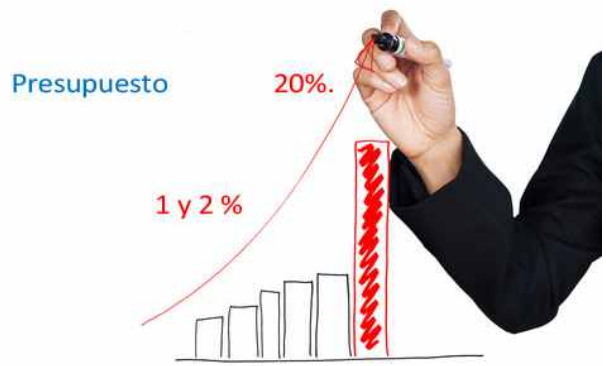
Consideremos la siguiente situación: una persona posee un capital de $1.000.000. Una institución ofrece el 4% de interés mensual. Esto significa que lo que la persona gana por la "prestación" de su dinero es el 4% de lo que deposita, en este caso, $1.000.000.

Luego, el 4% de $1.000.000 =

$$\frac{4 \times 1.000.000}{100} = \$40.000.$$

Estos $40.000 corresponden al interés de $1.000.000 al 4% mensual.

Notemos que el monto final (capital más interés) es de $1.040.000.



UNIDAD 1
EVALUACION

1. Se unen las cantidades de leche de dos recipientes que son de 5/3 lt; y 7/4 lt; pero luego se consumen sucesivamente 5/6 lt y 3/8. Si se desea saber la cantidad de leche que queda en el recipiente, debemos:

A. Saber qué cantidad de leche se consumen.
B. Saber qué cantidad de leche se juntó.
C. Calcular la cantidad de leche que se juntó.
D. Saber cuál es el excedente de un litro.

2. De acuerdo con la situación planteada, se puede afirmar que:

A. No queda leche, porque se consumen todo lo que se juntó.
B. Faltó leche porque lo que se consume es más que lo que se juntó.
C. La cantidad de leche que se junta es 41/12 lt.
D. La cantidad de leche que queda es de 53/24 lt, porque se juntaron 41/12 it y se consumiero 29/24lt.

3. Enrique, quien es profesor de matemáticas de la universidad, les hizo una evaluación de dos preguntas únicamente a sus alumnos, la primera vale el 40% y la segunda el 60%. Del total de estudiantes que presentaron el examen 17 ganaron la primera pregunta, 10 obtuvieron el 100% de la nota, 15 ganaron la segunda pregunta, 12 obtuvieron el 40% o el 60%; pero todos acertaron por lo menos en una pregunta, entonces es cierto que:

A. El examen lo presentaron más de 15 estudiantes y menos de 17.
B. 15 estudiantes de los 54 que presentaron el examen, obtuvieron el 60% de la nota.
C. Solamente 7 de los 22 estudiantes que presentaron el examen, obtuvieron el 40% de la nota.

D. 12 estudiantes del total que presentaron el examen obtuvieron el 100% de la nota.

2. Don Pablo, acostumbra darle la mesada a sus tres hijos así: Hernando de 10 años, Patricia de 8 años y Jorge de 6 años. Este mes dispone de $120.000 para repartir entre ellos. De acuerdo a ésta situación es cierto que:

A. A Patricia le corresponde menos que a sus dos hermanos, si su papá los reparte proporcionalmente.
B. Jorge es el que más recibe, porque su papá hace el reparto en proporción directa a las edades.
C. Patricia recibe más que Jorge pero menos que Hernando, ya que su papá hace el reparto proporcionalmente a las edades.
D. Si a Hernando le tocó más y a Jorge menos entonces el papá repartió en forma inversa a las edades.

Responda las preguntas 5 y 6 de acuerdo con la siguiente información.

Se desea construir un muro de 120m. de largo y 2m. de alto. Un trabajador planea realizar la obra en tres días, si el día lunes realiza un tercio de la obra, el martes la cuarta parte, el miércoles la sexta parte.

3. De acuerdo con esta información podemos afirmar que:

A. El trabajador cumple la propuesta realizada.
B. De acuerdo con lo planteado realizaría más obra de la necesaria.
C. No cumple la propuesta realizada.
D. No cumple con el trabajo, porque le faltaría la cuarta parte de la obra.

4. De acuerdo con lo planteado afirmamos:

A. Se realizó la obra, por lo tanto trabajó 240 m^2 de muro.
B. Si trabajó todo lo señalado, habría realizado una obra de 300 m^2.
C. Que le faltó realizar 120 m^2.
D. Que le faltó realizar 60 m^2.

5. Pedro, Mario y Andrés, deciden crear una microempresa de fabricación de zapatos; para esto cada uno aporte un capital igual. Mario, a los seis meses de formada la empresa decide retirarse y Andrés, se retira a los doce meses. El negocio arroja utilidad al cabo de dieciocho meses, tiempo en el cual se entrega el dinero y la utilidad a los socios que se retiraron y reparten las utilidades entre Pedro e Irene, por lo tanto es cierto que:

A. La cantidad que corresponde a cada socio se obtiene dividiendo las ganancias entre el número de socios.
B. Para obtener la cantidad de cada socio, se hace un reparto proporcional al producto del capital aportado.
C. Se realiza un reparto proporcional al tiempo durante el cual cada socio aportó su dinero para poder saber qué utilidad le corresponde a cada uno.
D. La utilidad del negocio se debe repartir en forma proporcional al capital aportado por cada socio.

6. Un muchacho va a comprar un pantalón en un almacén que ofrece el 20% de descuento sobre el valor total. Por poseer la tarjeta Joven tiene derecho a otro descuento del 10% sobre el valor que obtiene después del primer descuento.

   De acuerdo con lo anterior aplicar los dos descuentos en esta forma, equivale a aplicar sobre el precio del pantalón un único descuento del:

A. Quince por ciento.
B. Veinte por ciento.
C. Veintiocho por ciento.
D. Treinta por ciento.

7. Una empresa productora de vaselina genera una ganancia de $100.000, dos socios aportan $20.000 y $30.000, repartiéndose la ganancia en forma proporcional a los aportes. Concluimos que:

A. La diferencia obtenida por ellos es de $30.000.
B. Entre ambos ganan $120.000.
C. La diferencia entre lo obtenido por ellos es de $20.000.
D. No obtuvieron ganancia.

8. Veinte obreros pueden pavimentar una calle en 12 días. Si sólo dispongo de 10 obreros, entonces necesito:

A. Mayor número de días, porque cuento con menos obreros.
B. Exactamente la mitad del tiempo, porque existe una relación proporcional entre el número de obreros y el tiempo.
C. El doble del tiempo, porque a menor número de obreros mayor tiempo, es decir se da una relación inversa.
D. Menos tiempo porque hay menos obreros.

UNIDAD 2

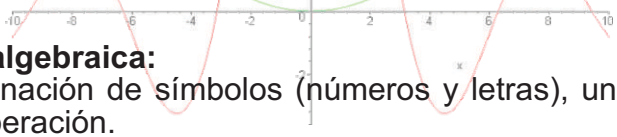
INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO ALGEBRAICO

UNIDAD 2

La compañía de seguros "Segurito S.A." paga a sus vendedores un salario básico mensual de trescientos mil pesos y además les paga un 5% de comisión sobre las ventas del mes. La relación lineal que existe entre el sueldo (S) recibido por los vendedores y la cantidad vendida (V) está dada por un modelo matemático:

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO ALGEBRAICO

El álgebra elemental es la parte de la matemática que trata del cálculo con símbolos literales y con operaciones abstractas que generalizan las cuatro operaciones fundamentales.



Expresión algebraica:
Es la combinación de símbolos (números y letras), unidos por signos de operación.

Ejemplos:

$3x^2$; $4pq^2 - 8a^3b^4c$;
$2a^7 - 6a^3b^4 + 9b^5$;

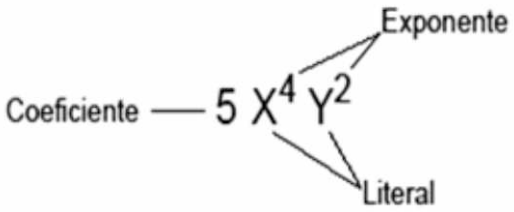
$$\sqrt{a+b-c}$$

$$\frac{(x+y)^n}{2}$$

Términos:
Corresponden a cada una de las partes de una expresión algebraica que están separadas entre sí por los signos más o menos.

En todo término se distinguen: el coeficiente numérico y el factor literal.

Ejemplo:



1. - CLASIFICACIÓN DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1.1 Monomios: son las que constan de un solo término.

Ejemplo: $6a^2b^3$

1.2 Binomios: son las que constan de dos términos.

Ejemplo: $4ab - 7c^3$.

1.3 Trinomios: son las que constan de tres términos.

Ejemplo: $a^4 + 3ab + b^3$.

1.4 Polinomios: son las que constan, en general, de dos o más términos.

Ejemplo: $x^3 + 23xy - 5xy^2 + 7y^3$

Grado de un Término

Es la suma de los exponentes de sus letras.

Ejemplo: $8a^2b$ es de tercer grado pues $b = b^1$.

Grado de un Polinomio

Es el grado del término más alto en el polinomio.

Ejemplo: $3a^5b^2 + 4a^4b^6c + 2a^2b^5 - b^4$ es de grado 11.

Términos Semejantes

Son aquellos que tienen el mismo factor literal.

Ejemplo: $2m^2n$ y $-3m^2n$.

Reducción de términos semejantes

Es una operación que consiste en remplazar varios términos semejantes por uno solo. Para ello se suman algebraicamente sus coeficientes numéricos.

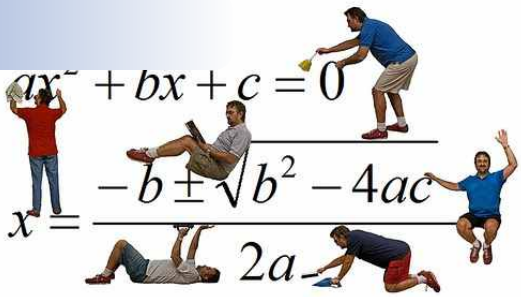
Ejemplo: $7x^2 + 2x^2 - 11x^2 = -2x^2$

Esta operación puede tener su analogía cuando se hace la siguiente reducción:

5 peras + 3 peras = 8 peras

Si las peras las simbolizamos por p, entonces la suma anterior puede abreviarse así:
5p + 3p = 8p

2. – CALCULO ALGEBRAICO



2.1 Multiplicación

Hay que considerar tres casos:

2.1.1 Multiplicación de Monomios

Se multiplican sus coeficientes numéricos entre sí y sus factores literales entre sí, sumando los exponentes de las letras iguales.

Ejemplo:

$$5a^4b^2c \cdot 3a^2b = (5 \cdot 3)a^{4+2}\, b^{2+1}c = 15a^6b^3c$$

2.1.2 Multiplicación de un Monomio por un Polinomio

Se multiplica el monomio por cada término del polinomio, separando los productos con el signo correspondiente.

Ejemplo:

$$(3x^2 - xy + 5y^2) \cdot 5x = (3x^2 \cdot 5x) - (xy \cdot 5x) + (5y^2 \cdot 5x) = 15x^3 - 5x^2y + 25xy^2$$

En general:

$$a(b + c - d) = ab + ac - ad$$

2.1.3 Multiplicación de polinomios

Se multiplica cada término del primero por todos los términos del segundo polinomio, efectuando todas las reducciones posibles.

Ejemplo:

$$(2x+3y)\,(a-2b+4c) = (2x*a) - (2x*2b) + (2x*4c) + (3y*a) - (3y*2b) + (3y*4c) = 2ax - 4bx + 8cx + 3ay - 6by + 12cy$$

En general:

$(a-b)(c+d-e)=ac+ad-ae-bc-bd+be$

2.2 División

También hay que considerar tres casos.

2.2.1 División de monomios

Se dividen sus coeficientes numéricos entre sí y sus factores literales entre sí, restando los exponentes de las letras iguales.

Ejemplo:

$$12x^3y^2 \div (-3x^2y) = (12 \div (-3))x^{3-2}y^{2-1} = -4xy$$

2.2.2 División de un polinomio por un monomio

Se divide cada término del polinomio por el monomio, separando los cocientes por el signo correspondiente.

Ejemplo:

$$(64x^4 - 8x^3 + 4x^2) \div 2x^2 =$$
$$(64x^4 \div 2x^2) - (8x^3 \div 2x^2) + (4x^2 \div 2x^2) =$$
$$32x^2 - 4x + 2$$

En general:

$$(b + c - d) \div a = b \div a + c \div a - d \div a$$

2.2.3 División de polinomios

Se ordenan ambos polinomios con respecto a una misma letra. Se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor, obteniéndose el primer término del cociente. Se multiplica

todo el divisor por el cociente parcial y se resta el producto del dividendo (o bien, se cambian todos los signos del producto y se le suma al dividendo). Se divide el primer término del resto por el primer término del divisor para obtener el segundo término del cociente y así sucesivamente hasta obtener un resto de menor grado que el divisor.

Ejemplo:

Dividir $(15a^4 - 7a^3b - 6a^2b^2 + 7ab^3 - 3b^4)$
Dividendo
por $(5a^2 + ab - 3b^2)$
Divisor

La operación se dispone de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{l|l}
(15a^4 - 7a^3b - 6a^2b^2 + 7ab^3 - 3b^4) & 5a^2 + ab - 3b^2 \\
\underline{-15a^4 - 3a^3b + 9a^2b^2} & \\
0 - 10a^3b + 3a^2b^2 + 7ab^3 - 3b^4 & \\
\underline{+10a^3b + 2a^2b^2 - 6ab^3} & \\
0 \quad 5a^2b^2 + ab^3 - 3b^4 & \\
\underline{-5a^2b^2 + ab^3 - 3b^4} & \\
0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}
\qquad 3a^2 - 2ab + b^2
$$

Al igual que en aritmética, debe cumplirse que D = dc + R.

Cuando el resto es cero, significa que la división es exacta.

3. PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN

3.1 Productos Notables

Son multiplicaciones cuyo resultado puede escribirse de memoria, sin hacer realmente la multiplicación. Corresponden a las tablas de multiplicar del álgebra elemental. Los principales productos notables son:

3.1.1 Cuadrado del binomio

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3.1.2 Suma por diferencia.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

3.1.3 Producto de binomios con un término repetido

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

3.1.4 Cubo del binomio

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

FACTORIZACIÓN

Factorar o factorizar consiste en transformar un polinomio o expresión algebraica como un producto de factores.

1. FACTOR COMÚN: consiste en buscar el o los elementos que se repitan. Si se trata de letras se busca el de menor exponente, pero si son números se tiene como factor el *máximo común divisor (MCD).*

Factorizar:

Factorización

a. $5xy + 5xz - 5xm = 5x(y + z - m)$

b. $m^8+m^6-m^4-m^2 = m^2(m^6+m^4-m^2-1)$

c. $18x^2-27x^4+36x^6 = 9x^2(2-3x^2+4x^4)$

d. $39m^4n+26m^3n^2+65m^2n^3 = 13m^2n(3m^2 + 2mn +5n^2)$

Ejercicios

Factorizar:

1. $7x^2 + 14x^2y + 21x^2z$

2. $17m^2n^3 - 51m^4n^2 + 119m^6n$

3. $(x+1)+(x+1)(x+2)+(x+1)(x+2)(x+3)$

4. $(x + y)^2 - 3m(x + y)^3 + (x + y)^5$

5. $(m + n + x)(2a+b) - (m+ n + x)(2b+c) + (m + n + x)(2c - a)$.

2. AGRUPACIÓN DE TÉRMINOS: se agrupan aquellos términos que presenten elementos comunes, se factorizan y finalmente se aplica el primer caso.

Factorizar:

a. $mx + my - ax - ay = (mx + my) - (ax + ay) = m(x + y) - a(x + y) = (x + y)(m-a)$

b. $1 + x + y + xy = (1 + x) + (y + xy) = (1 + x) + y(1 + x) = (1 + x)(1 + y)$

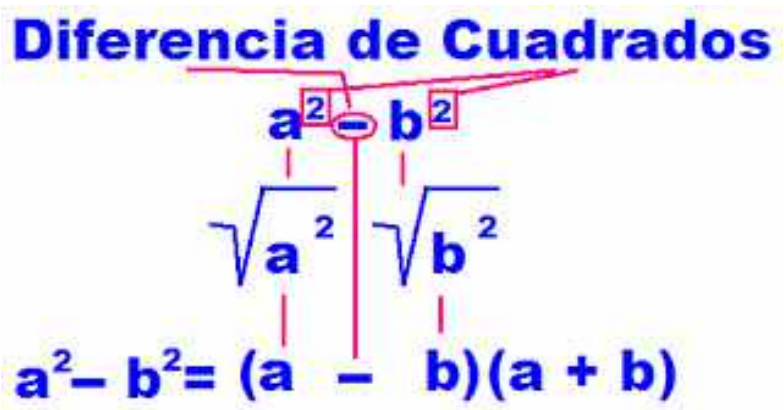
c. $40am + 6an - 10bm - 15bn = (4am+6an) - (10bm + 15bn) = 2a(2m + 3n) - 5b(2m +3n) = (2m + 3n)(2a - 5b)$

d. $axy - axm - by + bm - c^2m + c^2y$
$= (axy-axm) - (by-bm) + (c^2y-c^2m)$
$= ax(y - m) - b(y - m) + c^2(y - m)$
$= (y - m)(ax - b + c^2)$

Ejercicios

Factorizar:

1. $xy - y - x + 1$
2. $mn - mx - an + ax + n^2 - nx$
3. $15m^2 - 20ma + 12xm - 16xa + 20cm - 16cx$
4. $xy - xz - xc - ay + az + ac + my - mz - mc$
5. $10m - 20mn + 30mx - 17n + 34n^2 - 51nx + 7a - 14an + 21ax$



3. DIFERENCIA DE CUADRADOS : Se reconocen cuando se presentan dos términos cuadrados perfectos unidos por el signo menos

$$m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$$

Factorizar:

a. $25 - x^2 = (5-x)(5 + x)$
b. $49m^2 - 64n^2 = (7m - 8n)(7m + 8n)$

c. $\frac{x^2}{16} - \frac{n^6}{9} = \left(\frac{x}{4} - \frac{n^3}{3}\right)\left(\frac{x}{4} + \frac{n^3}{3}\right)$

d. $(x+y)^2 - (m-n)^2 = (x+y+m-n)\,(x+y-m+n)$

e. $\frac{(a+b)^2}{100} - \frac{m^{10}}{n^8} = \left(\frac{a+b}{10} + \frac{m^5}{n^4}\right)\left(\frac{a+b}{10} - \frac{m^5}{n^4}\right)$

Ejercicios

Factorizar

1. $m^2 - 100$
2. $a^2 - 4\,(x + y)^2$
3. $(m - n)^6 - r^{12}$
4. $(a + b + c)^2 - (x-y + z)^2$
5. $m^{10}n^6 - a^{12}b^{14}$

4. TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Se reconoce porque:

- presentan tres términos
- dos de ellos cuadrados perfectos y se les extrae la raíz cuadrada
- el doble producto de las raíces debe ser igual al segundo término
- el factor se forma uniendo las raíces con el signo del segundo término elevado al cuadrado.

$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$
$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$

a. $X^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$

X 5

$2*x*5 = 10x$

a. $X^2+49n^2 + 14nx = (x +7n)^2$

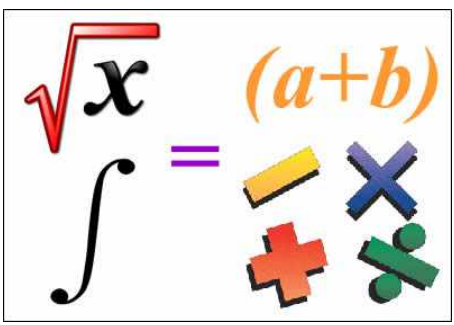
X 7n

$2*x*7n = 14nx$

a. $25n^2+16m^2-40mn = (4m-5n)^2$

5n 4m

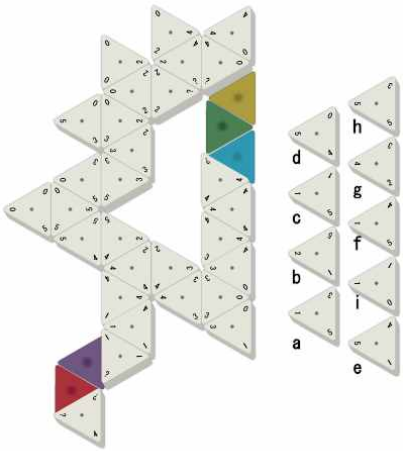
$2*5n*4m = 40mn$



Ejercicios

Factorizar:

1. $36x^2 – 12x + 1$
2. $25m^2 + 64n^2 + 80mn$
3. $49n^2 – 126nc + 81c^2$
4. $(a + b)^2x^2 – 2(a^2 – b^2)x+(a – b)^2$
5. $x^2 – x + ¼$



5. TRINOMIO DE LA FORMA:

$x^2 + bx + c$

$x^2 + bx + c =(x + m)(x + n)$

donde $m.n = c$ y

$m+n = b$

Factorizar:

a. $x^2 + 9x + 20 = (x + 5)(x + 4)$

b. $x^2 -17x + 72 = (x – 9)(x – 8)$

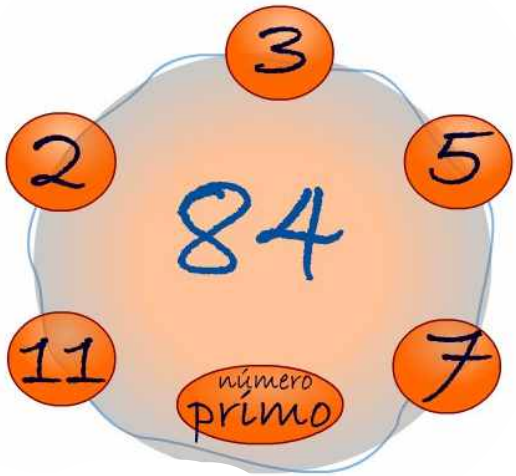
c. $x^2 – x – 30 = (x – 6)(x + 5)$

d. $x^2 +2x – 120 = (x + 12)(x – 10)$

Ejercicios

Factorizar:

1. $x^2 + 17x + 72$
2. $x^2 – 15x + 54$
3. $x^2 + 3x – 70$
4. $x^2 – 4x – 45$
5. $x^2 – 2x – 288$



6. TRINOMIO DE LA FORMA:

$$ax^2 + bx + c$$

Factorizar:

1. $5x^2-21x-20=\frac{(5x)^2-21(5x)-100}{5}$

$$=\frac{(5x-25)(5x+4)}{5}$$

$$=\frac{5(x-5)(5x+4)}{5}$$

$$= (x-5)(5x+4)$$

2. $6x^2 – 17x + 12$ = (factores primos del coeficiente en "x^2" y el término independiente)

$$\begin{array}{ll} 3x & -4 \rightarrow -8x \\ 2x & -3 \rightarrow \underline{-9x} \\ & \quad -17x \end{array}$$

$$= (3x – 4)(2x-3)$$

Ejercicios

Factorizar

1. $6x^2 - 7x - 3$
2. $20x^2 - x - 12$
3. $7x^2 + 10x - 8$
4. $10x^2 + 31x + 15$
5. $4x^2 + 7x - 36$

7. SUMA Y DIFERENCIA DE CUBOS

$m^3 + n^3 = (m + n)(m^2 - mn + n^2)$
$m^3 - n^3 = (m - n)(m^2 + mn + n^2)$
Factorizar
a. $x^3-8 = x^3-2^3 = (x-2)(x^2 + x.2 + 2^2)$
$= (x-2)(x^2 + 2x + 4)$

b. $27n^3 + 125 = 3^3n^3 + 5^3$
$= (3n + 5)(3^2n^2 - 3n.5 + 5^2)$
$= (3n + 5)(9n^2 - 15n + 25)$

Ejercicios

Factorizar

1. $x^3 + 64$
2. $8m^3 - 27$
3. $125x^3 + 8y^3$
4. $n^6 - 64m^9$
5. $1000a^9 + 343n^{15}$

8. CASO ESPECIAL

Factorizar

1. $x^4 + x^2 + 1$

$x^4 + x^2 + 1 = x^4 + x^2 + 1$

$+x^2 \quad - x^2$

$x^2 \qquad 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2$

$2x^21 \qquad = (x^2 + 1)^2 - x^2$

$=2x^2 \qquad = (x^2+1-x)\,(x^2+1+x)$

2. $9x^4 + 21x^2y^2 + 25y^4$

$9x^4 + 21x^2y^2 + 25y^4$

$3x^2 \qquad 5y^2$

$2.3x^25y^2$

$=30x^2y^2$

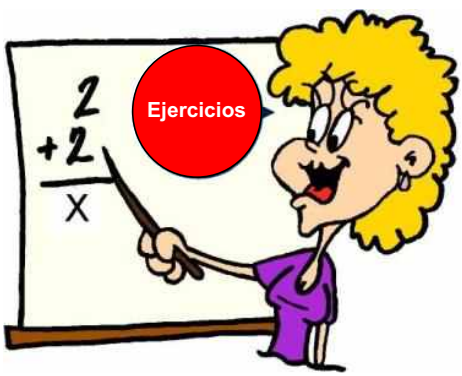
$= (9x^4 + 30x^2y^2 + 25y^4) - 9x^2y^2$

$= (3x^2 + 5y^2)^2 - 9x^2y^2$

$= (3x^2 + 5y^2 - 3xy)(3x^2 + 5y^2 + 3xy)$

Ejercicios

Factorizar:



1. $x^4 + 3x^2 + 4$
2. $x^8 - 3x^4y^4 + y^8$
3. $m^4 - 8m^2 + 4$
4. $a^{12} - a^6b^6 + 16b^{12}$
5. $16m^4 + 25n^4 + 24m^2n^2$

6. $49x^4 + 36y^8 - 100x^2y^4$
7. $m^4 + 4$
8. $x^8 + 64y^8$

Observación:

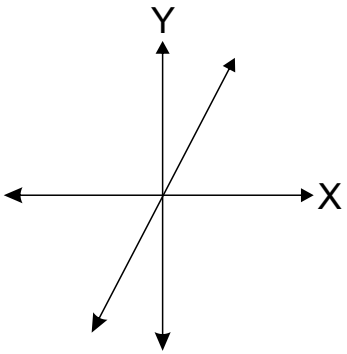
Algunas expresiones son irreductibles según el campo numérico en que las estemos factorizando.

Así, por ejemplo, la expresión 2x+5 es irreductible en Z, sin embargo, en Q, ella admite la Factorización $2\left(x + \frac{5}{2}\right)$

Análogamente, la expresión $x^2 - 3$ es irreductible en Q, sin embargo en IR, ella puede factorizarse como $(x + \sqrt{3})\,(x - \sqrt{3})$

4. - ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

La ecuación de primer grado con una incógnita es aquella que puede ser reducida a la forma general:



$ax + b = 0$, con $a, b \in IR$ y $a \neq 0$

Solución:

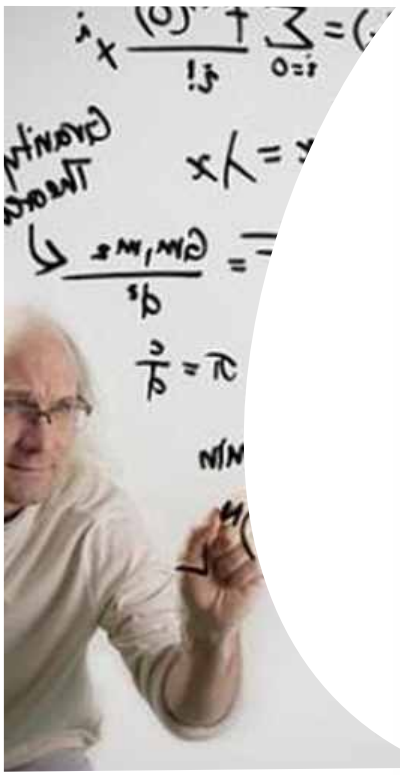
La solución de la ecuación anterior está dada por la fórmula:

$$X = -\frac{b}{a}$$

La ecuación anterior tiene:
I) Exactamente una sola solución si $a \neq 0$
II) Infinitas soluciones si $a=0$ y $b=0$
III) Ninguna solución si $a = 0$ y $b \neq 0$

5. INTERPRETACIÓN ALGEBRAICA DE ENUNCIADOS VERBALES

Una de las grandes ventajas que ofrece el Álgebra es la de poder escribir simbólica y abreviadamente expresiones que en el lenguaje corriente ocupan muchas palabras. Por ejemplo, es costumbre designar en Álgebra las cantidades desconocidas o incógnitas por medio de las últimas letras del abecedario. Así, por ejemplo, el doble de un número desconocido se representa por 2x; la mitad de otro número desconocido por $\frac{y}{2}$; el cuadrado de z por z^2, etc. A continuación mostramos la representación algebraica de algunos enunciados verbales, que aparecen con frecuencia en el cálculo algebraico:



Enunciado	Representación
El doble de un número	2x
El triple de un número	3x
La mitad de la suma entre a y b	$\frac{a+b}{2}$
El exceso de a respecto a b	a – b
El cubo de x	X^3
La raiz cuadrada de x	$\sqrt{x}$
La raiz cuadrada de la suma de a y b	$\sqrt{a+b}$
El cuadrado de la suma entre a y b	$(a + b)^2$
La suma de los cuadrados de a y b	$a^2 + b^2$
Un número de dos cifras en sistema decimal	10x + y
La diferencia entre n y la mitad de m	$n - \frac{m}{2}$
El producto entre a y el cuadrado de c	ac^2
El cociente entre a y el doble de b	$\frac{a}{2b}$
El valor absoluto del triple de x	|3x|
El inverso aditivo del producto entre a y d	-ab
El recíproco de y	$\frac{1}{y}$
Un número par	2n
Un número impar	2n – 1
La suma de dos naturales consecutivos	n + (n + 1)
El cuadrado del sucesor de x	$(x + 1)^2$
El sucesor del cuadrado de x	$x^2 + 1$
El recíproco del sucesor de a	$\frac{1}{a+b}$
El sucesor del recíproco de a	$\frac{1}{a} + 1$

Interpretación verbal de expresiones algebraicas

Este proceso es el inverso del anterior, es decir, dada una expresión algebraica (que puede ser una fórmula), se trata de enunciar verbalmente el significado de la expresión. Por ejemplo, la expresión $2x + 5y^2$ se interpreta como: "la suma entre el doble de x y el quíntuplo del cuadrado de y".

Otros ejemplos:

a) $5x^2 + \frac{2z}{3}$ "la suma del quíntuplo del cuadrado de x, con los dos tercios de z"

b) $(5x)^2 + \frac{2}{3}z$ "la suma del cuadrado del quíntuplo de x con los dos tercios de z"

c) $5(x + \frac{2z}{3})^2$ "el quíntuplo del cuadrado de la suma de x y los dos tercios de z"

Problemas de enunciado verbal

Metodología

Para resolver problemas de enunciado verbal puede resultar útil seguir los siguientes pasos:

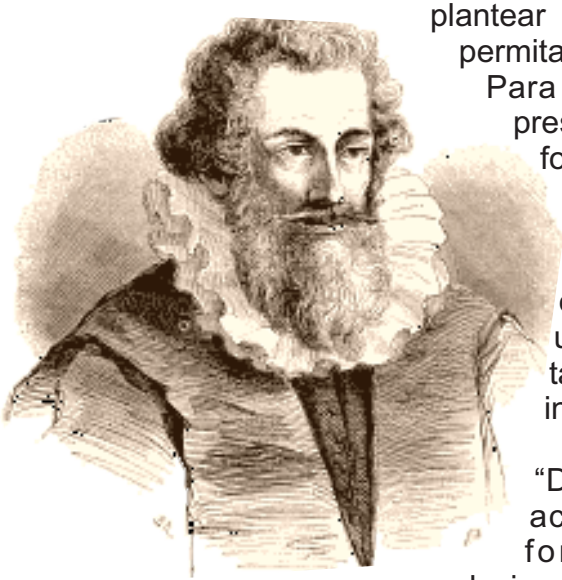
I. Comprensión del enunciado del problema

Antes de iniciar la resolución de un problema es necesario haber comprendido bien su enunciado. Una de las primeras dificultades que se presentan al intentar resolver un problema proviene de una deficiente preparación en comprensión de lectura. Por esta razón es recomendable como primer paso para resolver un problema de enunciado verbal:

“Leer cuidadosamente el problema, tantas veces como sea necesario para comprender bien su enunciado”.

II. Designación de la (s) incógnita (s) del problema

Un segundo paso necesario para la resolución de un problema consiste en designar la incógnita (o incógnitas) con miras a plantear una ecuación (o ecuaciones) que permita encontrar la solución al problema.



Para designar la incógnita debemos prestar atención a la pregunta que se formula en el problema. Sin embargo, es conveniente también tener presentes las relaciones existentes entre los datos y la incógnita, pues este hecho puede permitir plantear una ecuación más sencilla. Por lo tanto, el segundo paso se puede interpretar como:

“Designar la (s) incógnita (s) de acuerdo con la pregunta que se formula en el problema y las relaciones que proporciona el enunciado”

III. Traducción de frases al lenguaje matemático

Una vez designada (s) la incógnita (s) se procede a plantear la (s) ecuación (es) que conducirá (n) a la solución del problema. Para plantear tal ecuación (es) es necesario saber expresar en términos matemáticos las relaciones enunciadas verbalmente en el problema.

IV. Expresar relaciones en términos de ecuaciones

El paso siguiente en la resolución de problema es:
"Plantear una ecuación (o ecuaciones) de acuerdo con las relaciones que se desprenden del enunciado del problema".

V. Análisis de las soluciones encontradas

El último paso consiste en:
"Resolver la (s) ecuación (es) planteada (s) y analizar si las raíces de la ecuación son soluciones del problema".

Ejemplo:

a) Un estudiante debe leer un libro de literatura en una semana. Entre lunes y martes lee 1/5 del libro y el miércoles 1/3 del resto. Si para los restantes días de la semana todavía le quedan 64 páginas de la lectura, entonces ¿cuál es el número total de páginas del libro?

Solución: designando por "x" al número total de páginas del libro, tenemos que:

El número de páginas de lectura, de acuerdo al día es:

– Lunes – Martes: $\frac{1}{5}X$

– Miércoles: $\frac{1}{3} * \frac{4}{5}X = \frac{4}{15}X$

– Otros días: 64

Es decir, $\frac{1}{5}X + \frac{4}{15}X + 64 = x$

Transponiendo:

$X - 1/5 - 4/15X = 64$

$X - \frac{1}{5} - \frac{4}{15}X = 64$

$\left(\frac{15-3-4}{15}\right)x = 64$

$\frac{1}{5}X = 64$

$x = \frac{64*15}{8} = 8 * 15$

$x = 120$

El valor de x encontrado, satisface las condiciones del problema, por lo tanto, podemos asegurar que **el número de páginas del libro es 120.**

b) Si a los tres cuartos de un número x se le suman doce, el resultado es cuarenta y ocho. Con cuál de las ecuaciones siguientes se determina dicho número?

A. $\frac{3}{4}$+ x + 12 = 48

B. $\frac{3x+12}{4}$= 48

C. $\frac{3}{4}$+ x – 12 = 48

D. $\frac{3}{4}$x + 12= 48

Solución:

Puesto que x es el número buscado, entonces sus tres cuartas partes están dadas por $\frac{3}{4}$x.

Por lo tanto, si le sumamos 12, obtenemos $\frac{3}{4}$X+ 12,

que según el enunciado, nos da 48. Con lo cual la ecuación que resuelve el problema es: $\frac{3}{4}$X + 12 = 48

c) Un número está formado por dos cifras cuya suma es once. El número que resulta al invertir el orden de las cifras excede al triple del número primitivo en cinco unidades. Si designamos por “d” a las cifras de las decenas del número primitivo, la ecuación que resuelve el problema de encontrar el número original es:

A) [10(11–d)+d]–3[10d+(11–d)]=5

B) [10(11–d)+d]+3[10d+(11–d)]=5

C) 3[10(11–d)+d]–[10d+(11–d)]=5

D)3[10(11–d)+d]+[10d+(11–d)]=5

Solución:

Si **d** corresponde a las cifras de las decenas llamando **u** a la cifra de las unidades, resulta, por las condiciones del problema: u + d = 11, de donde
u = 11 – d

El número original, en nuestro sistema de numeración decimal, es 10d + u y el número con las cifras invertidas en el mismo sistema es 10u + d.

Según las condiciones del problema, tendremos la ecuación:

$$10u + d - 3(10d + u) = 5$$

Remplazando u = 11 – d, tenemos:

[10(11–d)+d]–3[10d+ (11–d)]=5

Problemas

1) Un arriero conducía un pequeño número de burros. Un burlón que pasaba le dijo: ¡debes tener mucho trabajo en arrear tus cien burros! No llevo ciento, respondió el arriero; si tuviera el duplo de los que arreo, más una cuarta, una octava y una décima parte de

ellos, y si te cuento a ti, entonces arrearía cien burros. ¿Cuál era el número de burros?

2. En el bolsillo derecho tengo $6 más que en el izquierdo. Paso del lado derecho tantos pesos al izquierdo como ya se encuentran aquí; en seguida, de la izquierda a la derecha, tantos pesos como sobran en ésta, y al fin, de la derecha a la izquierda, tantos pesos como ahora se encuentran aquí, y resulta que ahora tengo igual número de pesos en ambos bolsillos. ¿Cuántos pesos tengo en total?

3) Una liebre perseguida por un perro lleva ya adelantados 90 saltos, y da 5 mientras el perro da 4; y como 7 saltos de la liebre igualan a 5 del perro, ¿cuántos tendrá que dar éste para alcanzarla?

6. – SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

Un sistema de ecuaciones con dos incógnitas es un conjunto formado por dos o más ecuaciones que se verifican para los mismos valores de sus incógnitas.

Si se trata de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, la solución del sistema representa geométricamente el punto de intersección entre dos rectas.

Todo sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas (X, y Y) y coeficientes reales (a, a', b, b', c y c') puede ser llevado a la forma normal.

$$ax + by = c$$
$$a'x + b'y = c'$$

Análogamente, todo sistema de ecuaciones de primer grado con tres incógnitas (x, y, z) y coeficientes reales puede ser llevado a la

forma normal:

ax + by + cz = d
a'x + b'y + c'z = d'
a''x + b''y + c''z = d''

Métodos de solución

El método de solución más común es el método de eliminación, el cual se puede efectuar en tres formas diferentes:

1 Eliminación por reducción

Consiste en buscar el M.C.M. de los coeficientes de una misma incógnita en ambas ecuaciones y luego amplificar las ecuaciones por números apropiados para eliminar la incógnita por suma o resta según los coeficientes igualados tengan distinto o el mismo signo respectivamente.

2 Eliminación por sustitución

Consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y luego remplazarla (sustituirla) en la otra.

3 Eliminación por igualación

Consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones y luego igualar ambos resultados.

Ejemplo

Dado el sistema
x + y = 6a
y + z = 4b
z + x = 2c

Entonces x + y – z =

Solución:

Sumando las tres ecuaciones se obtiene
$2(x + y + z) = 6a + 4b + 2c$,
de donde: $x + y + z = 3a + 2b + c$.

Sumando las dos últimas ecuaciones se obtiene:
$x + y + 2z = 4b + 2c$.

Restándole la primera ecuación:
$x + y = 6a$, resulta $2z = 4b + 2c – 6a$.

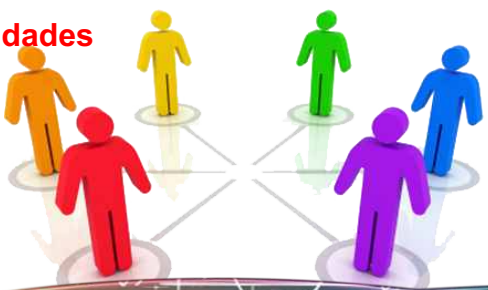
Finalmente calculamos
$x+y+z–2z = 3a+2b+c–(4b+2c–6a)$
$= 3a+2b+c–4b–2c+6a = 9a–2b–c$.

Es decir: $x + y – z = 9a – 2b – c$

7. – DESIGUALDADES

Si **a** y **b** son números reales y el resultado de (a - b) es positivo, se dice que a es mayor que **b** (a > b), lo cual indica que **b** es menor que a (b < a).

7.1 Propiedades de las desigualdades



1. Si $a>b$ y $b>c \Rightarrow a>c$

Ejemplo: $10>4$ y $4>3 \Rightarrow 10>3$

2. Si $a>b \Rightarrow a \pm c > b \pm c$

Ejemplo:

$3>2 \Rightarrow 3+5 > 2+5;\ 8>7$

$15>5 \Rightarrow 15-10 > 5-10;\ 5>-5$

3. Si a>b y c es positivo ac>bc

Ejemplo:

$5>2 \Rightarrow 5(-2)<2(-2);\ -10< -4$

$8>3 \Rightarrow 8(4) > 3(4);\ 32 > 12$

7.2 Intervalos

Son un subconjunto de los números reales que se encuentran delimitados.

7.3 Clases de Intervalos

7.3.1 Intervalo abierto

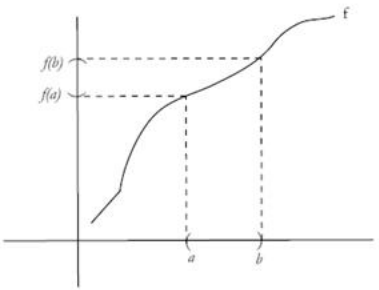
$(a,b) = \{x/\ a<x<b\}$

Ejemplo:

I = (5, 10):

Es el conjunto de números comprendidos entre 5 y 10, sin pertenecer al conjunto los números 5 y 10.

7.3.2 Intervalo cerrado



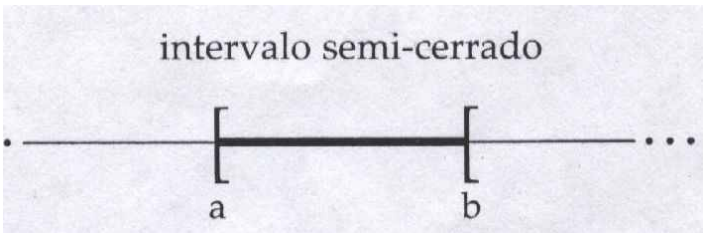
[a,b] = {x/ a≤x ≤b}

Ejemplo:

I = [1,6]

Son el conjunto de números reales comprendidos desde el número 1 hasta el número 6: los números 1 y 6 pertenecen al conjunto.

7.3.3 Intervalos semi-abiertos o semi-cerrados



[a,b) o (a,b]

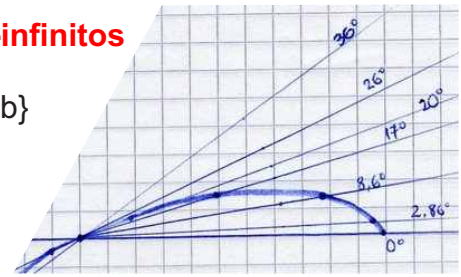
[a,b)={x/a ≤x < b}o(a,b]=x/a<x≤b }

Ejemplo:

I = (3, 8] Pertenecen al conjunto los números reales comprendidos desde el 3 hasta el 8, sin pertenecer al conjunto el número 3.

I = [-2, 6) Pertenecen al conjunto los números reales comprendidos desde el –2 hasta el 6, sin pertenecer al conjunto el número 6, pero si el número –2.

7.3.4 Intervalos abiertos semi-infinitos



(a,∞) = {x / a<x} (∞,b) = {x / x < b}

Ejemplo:

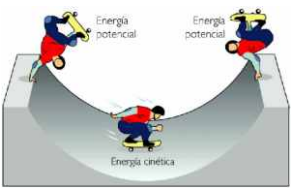
I = (3, ∞): Son el conjunto de números reales mayores que 3, sin incluir el 3.

I = (-∞,1) Son el conjunto de números menores que 1, sin incluir el número 1.

7.3.5 Intervalos cerrados semi- infinitos

[a,∞) = {x / a ≤ x} (∞,b] = {x/x ≤ b}

Ejemplo:

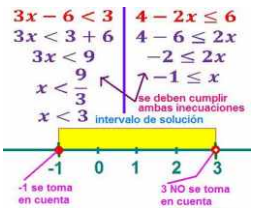


I = [1, ∞): Son el conjunto de números reales mayores que 1, incluye el 1.

I = (-∞,-3] Son el conjunto de números reales menores que -3, incluye el -3.

7.4 Inecuaciones

Es una desigualdad que posee cantidades desconocidas



Ejemplo:

3x> 2x + 8

La solución de las inecuaciones se fundamenta en las propiedades de las desigualdades. El método de resolver las inecuaciones, teniendo en cuenta que al pasar a dividir o multiplicar al otro lado de la desigualdad, ésta se invierte, si el número es negativo.

Ejemplo:

a) $2x + 1 > 5$
$2x > 5 - 1$
$2x > 4$ no se invierte la desigualdad
(>) Porque 2 es número positivo
$X > 4/2 \Rightarrow x > 2$ R/Sol: $\{x/x > 2\}$
$I = (2, \infty)$

b) $-3x + 8 \geq -x + 3$
$-3x + x + 8 \geq 3$
$-2x \geq -5$ Se invierte la desigualdad porque –2 es un número negativo
$x \leq -5/-2$ R/ Sol: $= \{ x / x \leq 5/2\}$
$I = (-\infty, 5/2]$

7.5 Sistema de inecuaciones

Es la reunión de dos o más inecuaciones lineales.

Ejemplo:

$2x + 1 > x$

$3 + 2x > 1$

El procedimiento para resolverlo es hallar el conjunto solución de cada inecuación; la solución es la intersección de los conjuntos.

Ejemplo:

$x + 3 > 4 \qquad (1)$
$-2x + 4 \geq 0 \qquad (2)$

Sol. Inecuación (1). Sol. Inecuación (2)

$x + 3 > 4$
$x > 4 - 3$
$x > 1$

$-2x + 4 \geq 0$
$-2x \geq -4$
$x \leq -4 / -2$
$x \leq 2$

$S1 = \{x / x > 1\}$ $\qquad$ $S2 = \{x / x \leq 2\}$
$I_1 = (1, \infty)$ $\qquad$ $I_2 = (-\infty, 2]$
$ST = S1 \cap S2$
$I_T = I_1 \cap I_2$
$ST = \{x / 1 < x \leq 2\}$
$I_T = (1, 2]$

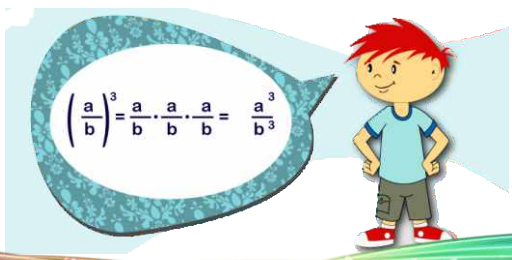
8. POTENCIACIÓN

La expresión a^n es la enésima potencia de a, donde **a** es la base de la potencia y **n** es el exponente.

Definición inductiva de la potencia

Para una base real ($a \in IR$) y un exponente natural ($n \in IN$), se define:

$$\begin{cases} a^1 = a \\ a^{n+1} = a^n * a \end{cases}$$



8.1 Propiedades de las potencias

8.1.1 La potenciación es distributiva con respecto de la multiplicación.

$$(ab)^n = a^n b^n$$

8.1.2 La potenciación es distributiva con respecto de la división.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Observaciones:

1) La potenciación no es distributiva con respecto de la adición ni de la sustracción.

2) La potenciación no es una operación asociativa:

$$(a^m)^n \neq a^{(m^n)}$$

3) La potenciación no es una operación conmutativa:

$$a^n = n^a; \forall\ a, n \in \mathbb{R}, \text{ si } a = n$$

La única excepción conocida a esta regla general, con números pequeños, es: $2^4 = 4^2$

8.2 Reglas operatorias para el cálculo con potencias

8.2.1 Multiplicación de potencias de igual base

Para multiplicar potencia de igual base, se conserva la base y se suman los exponentes.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

8.2.2 División de potencia de igual base

Para dividir potencias de igual base, se conserva la base y se restan los exponentes.

$a^m : a^n = a^{m-n}$

8.2.3 Potencia elevada a un exponente

Para elevar una potencia a un exponente, se conserva la base y se multiplican los exponentes.

$(a^m)^n = a^{mn}$

8.2.4 Potencia de exponente cero

Toda potencia de base real no nula y exponente cero vale uno.

$$a^0 = 1 \qquad \forall a \in IR,\ a \neq 0$$

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \qquad \forall a \in IR,\ a \neq 0$$

8.2.5 Potencia de exponente negativo

Toda potencia de exponente negativo es igual al valor recíproco de la base elevada al exponente positivo correspondiente.

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \qquad \forall a \in IR,\ a \neq 0$$

Signo de una potencia

1) Toda potencia de exponte par es siempre positiva.

2). Toda potencia de exponente impar conserva el signo de la base.

Ejemplo:

a) $2 * 2^{n} + 4 * 2^{n-2} + 8 * 2^{n-3} =$

Solución:

$2*2^{n}+4*2^{n-2}+8*2^{n-3} = 2^{n+1}+2^{2}*2^{n-2}+2^{3}*2^{n-3} =$

$2^{n+1} + 2^{n} + 2^{n} = 2^{n}(2+1+1) = 2^{n}(4) = 2^{n}(2^{2}) = 2^{N+2}$

b) Si a y b son números reales no nulos, entonces

$$(a^{-1} + b^{-1})^{-1} : (a+b)^{-1} =$$

$$(a^{-1} + b^{-1})^{-1} : (a+b)^{-1} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^{-1} : (a+b)^{-1} = \left(\frac{a+b}{ab}\right)^{-1} : \frac{1}{a+b} = \frac{1}{a+b} = \frac{ab}{a+b} * (a+b) = ab$$

9. RADICACIÓN

La radicación es una de las operaciones inversas de la potenciación. Dado un número real **a** (cantidad subradical) y un número natural **n** (índice), entonces definimos raíz enésima de **a** como un número **b** tal que la enésima potencia de **b** es **a.**

Si a Є IR y n Є IN, entonces $\sqrt[n]{a}$=b↔b^n=a

Dependiendo del valor del índice las raíces se designan por:

$\sqrt[2]{a}$: Raíz cuadrada de a (generalmente se escribe $\sqrt{a}$)

$\sqrt[3]{a}$: Raíz cúbica de a.

$\sqrt[4]{a}$: Raíz cuarta de a.

$\sqrt[5]{a}$: Raíz quinta de a.

Propiedad fundamental de las raíces.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

9.1 Reglas operativas para el cálculo con raíces

Si $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ representa números reales, entonces:

9.1.1. Raíz de un producto:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$$

9.1.2. Raíz de un cociente:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

9.1.3. Raíz de una potencia:

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$$

9.1.4. Raíz de una raíz:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

9.1.5. Amplificación de una raíz:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^{m} = \left(\sqrt[nk]{a}\right)^{mk} \quad \text{con k } \in \text{ IN}$$

9.1.6. Simplificación de una raíz:

$$\left(\sqrt[nk]{a}\right)^{mk} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{m} \quad \text{con k } \in \text{ IN}$$

9.2 Racionalización de denominadores

Esta operación consiste en, dada una expresión que contenga raíces inexactas en el denominador (raíces cuadradas, cúbicas, etc), obtener una expresión equivalente a ella pero que no contenga raíces inexactas en el denominador. Dicho en otras palabras, se trata de transformar una expresión que contenga números irracionales en el denominador en otra equivalente que contenga número racionales en el denominador.

Cabe hacer notar que esta operación no siempre es posible y, cuando lo es, puede presentarse casos bastantes complicados. Por lo tanto, trataremos los casos de más frecuente ocurrencia, dejando como inquietud otros casos que requieren más estudio.

9.2.1. Primer caso: Denominador monomio

Ejemplo:

Racionalizar el denominador de $\frac{3}{\sqrt{2}}$

Recordemos que: $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$, luego, basta amplificar por $\sqrt{2}$,

con lo cual nos queda:

$$\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}*\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

El factor por el cual se amplifica se llama factor **racionalizador.** Aquí es $\sqrt{2}$,

9.2.2. Segundo caso: denominador binomio

Ejemplo:

Racionalizar: $\frac{6}{\sqrt{13}+\sqrt{10}}$

Recordemos que

$$(\sqrt{13}+\sqrt{10})(\sqrt{13}-\sqrt{10})=\left(\sqrt{13}\right)^2-\left(\sqrt{10}\right)^2=13-10=3$$

Luego el factor racionalizador de $\sqrt{13}+\sqrt{10}$ es $\sqrt{13}-\sqrt{10}$;

ambos factores se llaman conjugados. Por lo tanto, tendremos:

$$\frac{6}{\sqrt{13}+\sqrt{10}}=\frac{6}{\sqrt{13}+\sqrt{10}}*\frac{\sqrt{13}-\sqrt{10}}{\sqrt{13}-\sqrt{10}}=\frac{6\left(\sqrt{13}-\sqrt{10}\right)}{3}=2\left(\sqrt{13}-\sqrt{10}\right)$$

PROBLEMAS

¿Cuál es el factor racionalizador en las siguientes expresiones?

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$

Recuerde la identidad: $a^3+b^3=(a+b)(a^2-2ab+b^2)$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}}$ ¡Este es un ejemplo difícil!

c) $\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$ ¡Muy difícil!

9.3. Potencia de Exponente Racional.

Toda potencia de exponente racional, de la forma $\frac{m}{n}$ corresponde a la raíz enésima de la enésima potencia de a.

En símbolos:

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

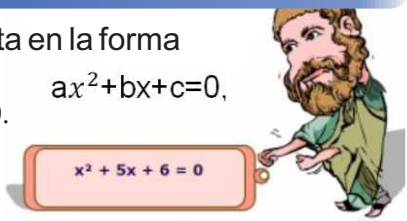
Ejemplos:

a) $81^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{81^3}=\left(\sqrt[4]{81}\right)^3=3^3=27$

b) $16^{\frac{3}{2}}=\sqrt{16^3}=4^3=64$

10.- ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

Es toda ecuación que puede ser puesta en la forma $ax^2+bx+c=0$, siendo b y c coeficientes reales y $a \neq 0$.



10.1 Fórmula Cuadrática

Las dos soluciones de la ecuación anterior están dadas por la siguiente fórmula, llamada fórmula cuadrática:

$$X=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

10.2 Naturaleza de las raíces de la ecuación de segundo grado

En la fórmula cuadrática $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, la cantidad b^2- 4ac se llama discriminante y se designa con la letra griega delta mayúscula (Δ).

El discriminante es el que determina (discrimina) el carácter de las raíces o soluciones de una ecuación de segundo grado.

SIGNO	TIPO DE SOLUCIÓN
$\Delta > 0$	Reales y Distintas
$\Delta = 0$	Reales e iguales
$\Delta < 0$	Complejas Conjugadas

Ejemplos:

a) Si la ecuación $5X^2$ - kx+6=0 tiene una solución igual a -3, ¿cuál es el valor de k?

Solución:
Puesto que x=-3 es solución de la ecuación dada, remplazando dicho valor en ella se obtiene:

$5(-3)^2$-k(-3)+6=0

45+3k+6=0

3k=-51, donde; k= -17

b) Si $a^2 + 2ab+a+b$ =12 y a y b son números reales negativos entonces, ¿Cuánto vale a+b?

Solución:

Puesto que a^2+2ab+b^2=$(a+b)^2$, tenemos $(a+b)^2$+(a+b)=12,

es decir: $(a+b)^2$+(a+b)-12=0, ¡ecuación de segundo grado en (a+b) ¡ Resolviéndola se encuentra (a+b=-4) o (a+b=3). Ahora bien, como a y b son números reales negativos, entonces (a+b) tampoco debe ser un número real negativo. Por lo tanto (a + b =-4).

11. CASOS SIMPLES DE SISTEMAS CUADRÁTICOS DE DOS ECUACIONES CON DOS VARIABLES

Un sistema de ecuaciones es de segundo grado o cuadrático sí y solo sí, si al menos una de las ecuaciones que la forman es de segundo grado.

Las formas más comunes de los sistemas cuadráticos, agrupadas para su mejor resolución, son los siguientes:

11.1 Una ecuación lineal y una ecuación cuadrática

$$\begin{aligned} x+y&=a \\ xy&=b^2 \end{aligned}$$

11.2 Una ecuación cuadrática y una ecuación lineal

$$\begin{aligned} x^2+y^2&=a^2 \\ x \pm y&=b \end{aligned}$$

11.3 Dos ecuaciones cuadráticas

$$x^2 \pm y^2 = a^2$$

$$xy = b^2$$

Ejemplos:

a) El conjunto solución del sistema

$$x^2 + y^2 = 25 \text{ es}$$
$$x + y = 7$$

Solución:

La resolveremos mediante el método de completación del cuadrado del binomio:

$x^2+y^2=25$ $x + y=7$	Multiplico por 2
$2x^2 + 2y^2=50$ $x^2 + 2xy + y^2=49$	Completo cuadrante Restando miembro a miembro

$$x^2 - 2xy + y^2 = 1$$

$$(x - y)^2 = 1$$

$$x - y = \pm 1$$

Ahora se forman dos sistemas lineales:

$x + y = 7$
$x - 7 = 7$
$x + y = 7$
$x - y = -1$

b) Dado el sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ xy &= 8 \end{aligned}$$

Solución:

En este caso no necesitamos resolver el sistema sino solamente combinar adecuadamente las dos ecuaciones del sistema para calcular lo que se nos pide.
Tendremos:

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ xy &= 8 \end{aligned}$$

Completo cuadrado

Multiplico por 2

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 &= 16 \\ + \quad -2xy \quad &= -16 \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 = 0$$

12.-ECUACIONES IRRACIONALES REDUCIBLES A ECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO

Una ecuación irracional es aquella en la que la incógnita aparece bajo el signo radical.

Ejemplos:

a) Al eliminar los radicales, con el objeto de resolver la ecuación irracional siguiente:

$-\sqrt{3x+1} + 2\sqrt{x-1} = 0$, se obtiene:

Solución:

$-\sqrt{3x+1} + 2\sqrt{x-1} = 0$, Aislando la raíz negativa en el segundo miembro de la ecuación:

$2\sqrt{x-1} = \sqrt{3x+1}$ / $(\square)^2$

$4(x-1) = 3x+1$ Trasponiendo al lado izquierdo:

4(x – 1) – (3x + 1) = 0, es decir: 4(x – 1) – 3x – 1 = 0

4X - 4 - 3X-1 = 0

X = 5

b) El conjunto solución de la ecuación

$4 + \sqrt{x+8} = x$ es:

Solución:

Aislando la raíz y elevando el cuadrado, tendremos:

$\sqrt{x+8}$ = x – 4

$x + 8 = x^2$ - 8x + 16

x^2- 9x + 8 = 0 (ecuación de segundo grado cuyas raíces son x_1=1 y x_2=8)

Comprobación

1) x_1 = 1:4 $+\sqrt{1+8}$ ¿=? 1

4 + $\sqrt{9}$ ¿=? 1

4 + 3 ¿=? 1

7 ¿=? 1 ¡No es solución!

2) x_2 = 8:4 + $\sqrt{8+8}$ ¿=? 8

$4 + \sqrt{16}$ ¿=? 8

4 +4 ¿=? 8

8 = 8

Observaciones y comentarios:

Este ejemplo pone de manifiesto una vez más la importancia de comprobar las soluciones de una ecuación. Aplicando nuestros conocimientos acerca de desigualdades en IR, ¿cómo podría saberse a priori cuál o cuáles de las raíces encontradas serían soluciones de la ecuación original sin comprobarlas.

13. ECUACIONES EXPONENCIALES

Una ecuación exponencial es aquella en la que la incógnita aparece en el exponente de alguna potencia.

Ejemplos:

a) Dada la ecuación exponencial

$$\left(6\frac{1}{4}\right)^{2x-1}:(2{,}5)^{3x+5}=(0{,}4)^{x+3}, \text{ entonces x=}$$

Solución:
Debemos expresar las diferentes bases de las potencias en términos de una sola base común. Para ello observemos que:

$$\left(6\frac{1}{4}\right)=\frac{25}{4}=\left(\frac{5}{2}\right)^2 ; 2{,}5=\frac{5}{2} \text{ y } 0{,}4=\frac{2}{5}=\left(\frac{5}{2}\right)^{-1}$$

Entonces la ecuación nos queda así:

$$\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{2}\right]^{2X-1} : \left(\frac{5}{2}\right)^{3X+5} = \left[\left(\frac{5}{2}\right)^{-1}\right]^{X+3}$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{4X-2} : \left(\frac{5}{2}\right)^{3X+5} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-X-3}$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{4X-2-3X+5} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-X-3}$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{X-7} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-X-3}$$

Ahora aprovechamos el hecho de que la función exponencial es inyectiva, lo que se traduce en que potencias iguales de la misma base tienen que tener sus exponentes iguales.
X – 7 = -x - 3, de donde x = 2

Si el valor de

$$c = \frac{a^3+b^3}{a+b} - (a-b)^2 \quad \text{con } a \neq -b \text{ y } ab \neq 1,$$

entonces el valor de x en la ecuación exponencial

es $$(ab)^{x+1} = (c^x)^2$$

Puesto que $\frac{a^3+b^3}{a+b} = a^2 - ab + b^2$ y $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,

entonces

c= $a^2 - ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$= a^2-ab +b^2 − a^2+2ab-b^2=ab

La ecuación queda:

$(ab)^{x+1}=[(ab)^x]^2$

$(ab)^{x+1}=(ab)^{2x}$

Ahora bien, ocupando el hecho que función exponencial es inyectiva, resulta:

X+1 = 2x, de donde x= 1

FUNCIÓN LINEAL Y ECUACIÓN DE LA LÍNEA RECTA

Una función es lineal cuando se puede representar de la forma

Donde: m y b Є R y m ≠ 0

La función lineal al graficarla en el plano cartesiano representa una línea recta.

Ejemplo:

Representar gráficamente la función Y = 2x +3.
Solución: 1. Calculo de las parejas ordenadas.

Si x=0 →	Y=2(0) + 3	Y=3
Si x=1→	Y=2(0) +3	Y=2+3=5
Si x=2→	Y=2(2) +3	Y=4+3=7
Si x=-1→	Y=2(-1)+3	Y=-2+3=1

Por tanto algunas parejas ordenadas son:
(0,3); (1,5) ;(2,7) y (-1,1)

2. De la función lineal: Y=mx + b
m= Representa la pendiente o sea el grado de inclinación de la recta con respecto al eje x.
b= Punto sobre el eje Y donde la línea recta pasa.
La pendiente representa la relación entre cada punto de la recta; si (x_1, Y_1) y (x_2, y_2) son parejas ordenadas que pertenecen a la misma recta.

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(2,1)$ y $P_2(1,3)$.

Solución:

1. P1(2,1) P2(1,3)
   Por lo tanto: x_1=2; $y_1 = 1$; $x_2 = 1$; $y_2 = 3$
2. Remplazamos los valores en la ecuación
   m= (3-1)/(1-2)=2/-1=-2
3. Ahora con el valor de la pendiente y cualquiera de los puntos, remplazo en la ecuación de pendiente sustituyendo uno de los puntos por las variables X y Y.

$$m= (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$$

m= -2 P(2,1)

-2 = (y-1)/(x-2)

4. Despejando y

$$y - 1 = -2(x - 2)$$
$$y = -2x + 4 + 1$$
$$y = -2x + 5$$

Ejemplo:

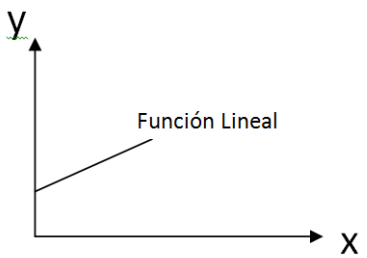
Hallar la ecuación de la línea recta que posee pendiente m=1 y pasa por el punto (0,1).

Solución:

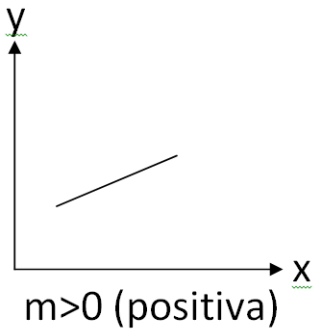
Se resuelve de igual manera que el ejercicio anterior a partir del punto 3.

Orientación de las Funciones Lineales:

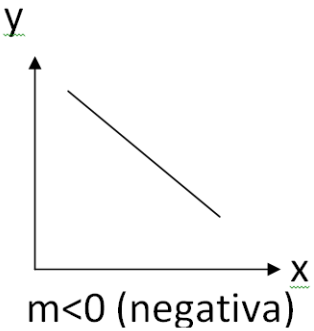
La pendiente (m) representa la tangente del ángulo entre la función lineal y el eje X. Es decir, a mayor pendiente mayor inclinación de la función.



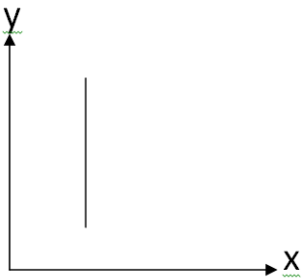
El signo de la pendiente indica la orientación de la función lineal con respecto al eje Y.



m>0 (positiva)

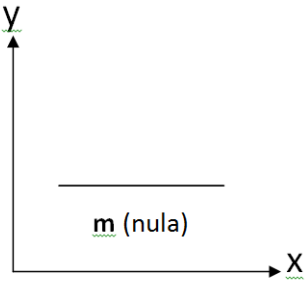


m<0 (negativa)



$(x_1 = x_2)$

m es indefinida



$(y_1 = y_2)$

m = 0

Las cinco formas de la ecuación de una recta son:

1. Ecuación General:
   Ax + By + C = 0, en ese caso $m = \frac{-A}{B}$

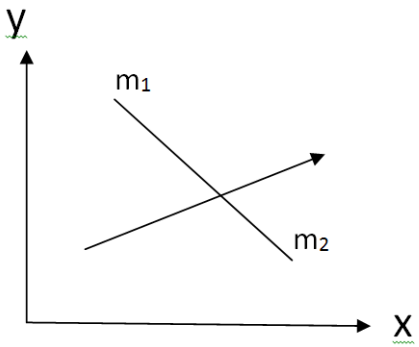
2. Ecuación punto pendiente
   $$(y-y_1) = m(x - x_1)$$

3. Ecuación pendiente-intersección
   y= mx + b

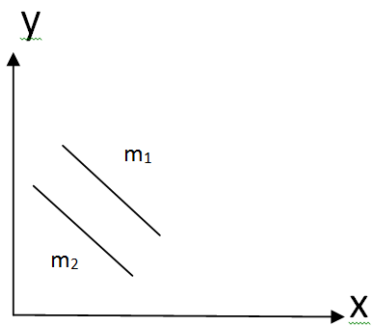
4. Recta vertical
   x = a

5. Recta horizontal
   y= b

a. Líneas perpendiculares: dos líneas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es -1, es decir $m_1 m_2 = -1$



Líneas paralelas: Dos líneas son paralelas sí y solo sí sus pendientes son iguales, es decir $m_1 = m_2$



Ejemplo:

¿Cuál debe ser el valor de K en la ecuación Kx + (K-1) y +2= 0 para que dicha recta sea paralela con 3x + 6y + 3 = 0?

Es obvio que la pendiente de la primera recta es $\frac{-k}{k-1}$ y que la pendiente de la segunda es $\frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$

Para que sean paralelas ambas pendientes tienen que ser iguales, así que:

$$\frac{-k}{k-1} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{-2k = -k +1} \quad \text{luego k = 1}$$

Ejemplo:

Usemos sólo la pendiente y el Y intercepto para graficar la recta:

$$Y = -\frac{5}{6}x + 3$$

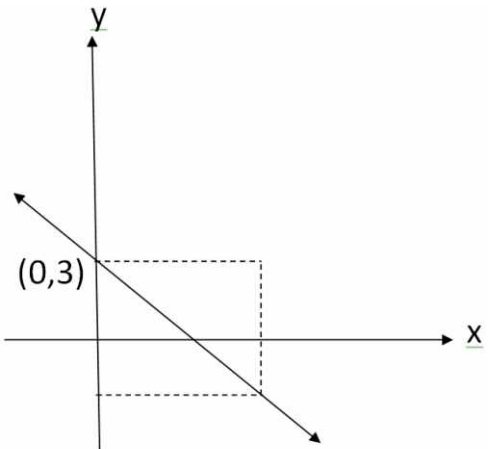
Respuesta: La pendiente es $-\frac{5}{6}$

El Y – intercepto es 3.

Como él Y-intercepto es 3, ubicamos el punto (0,3).

Como la pendiente es $-\frac{5}{6}$, movemos 6 unidades hacia la derecha de (0,6) y -5 unidades hacia abajo para localizar un segundo punto.

Trazamos la recta uniendo los dos puntos.



FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una función es cuadrática si es de la forma

$$f_x = ax^2 + bx + c \;\; donde\, a, b\, y\, c \in R\, y\, a \neq 0.$$

La gráfica de la función cuadrática representa en el plano cartesiano una parábola; del signo de "a" depende la orientación de la concavidad. Si el signo es negativo la parábola abre hacia abajo y si es positivo hacia arriba. Vértice

$$x = -\frac{b}{2a}$$

En una función cuadrática los cortes en el eje X representan los ceros de la ecuación cuadrática y el término independiente es el corte con el eje Y.

Ejemplos:

$x^2 - 2x - 3 = 0$ $\qquad$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$a = 1;\ b = -2;\ c = -3$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \qquad x = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{2+4}{2} \qquad x_2 = \frac{2-4}{2}$$

$$x_1 = \frac{6}{2} = 3 \qquad x_2 = -\frac{2}{2} = -1$$

Ejemplo:

Dada la función Y = $(x-2)^2$,

hallar la gráfica, el dominio, el rango y los interceptos de crecimiento y de decrecimiento.

Respuesta:

Se hallan algunos puntos donde pasa la curva

Para x=0; entonces y $(0) = (0-2)^2 = 4$

Para x=1; entonces y $(1) = (1-2)^2 = 1$

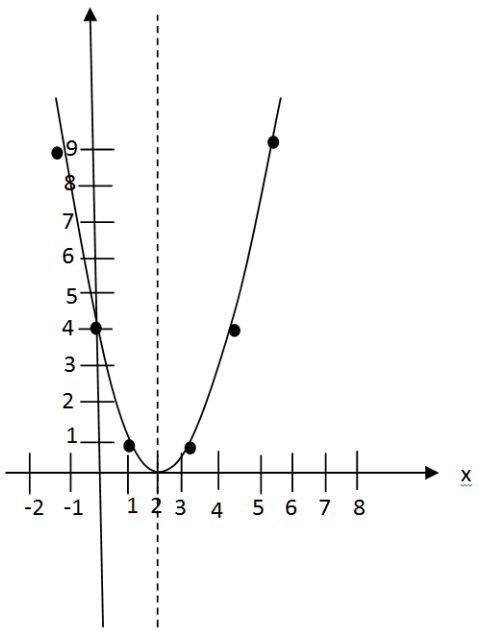
Para x=2; entonces y $(2) = (2-2)^2 = 0$

Para x=3; entonces y $(3) = (3-2)^2 = 1$

Para x=4; entonces y $(4) = (4-2)^2 = 4$

Tabla de datos

X	Y
-2	16
-1	9
0	4
1	1
2	0
3	1
4	4
5	9
6	16



La parábola se ha trasladado dos unidades hacia la derecha y se observa un eje de simetría en x=2

Dominio = R. La curva es decreciente para los valores menores que x= 2 y creciente para los valores que x= 2.

Rango R+.

14.- ECUACIÓN Y FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Sea una **b** una base real positiva distinta de uno. Se define el logaritmo de un número real positivo x, con respecto a la base b, como el número tal que **b** elevado a **y** nos da **x.**

En símbolos:

$$log_b x = y \leftrightarrow b^y = x \quad , \ \forall \ b, x \in \mathbb{R}^+ \wedge b \neq 1$$

En $log_b x$, **b** base y **x** se llama argumento.

Para evitar confusiones y ambigüedades, acostumbraremos a escribir el argumento del logaritmo entre paréntesis.

Así por ejemplo: $log_b x = log_b(x)$

Nota:

Por convención se ha establecido que el logaritmo de base diez, se designe sin escribir la base, y el logaritmo de base **e** (**e** aproximadamente igual a 2,7182818), como logaritmo natural, es decir,

$log_{10}(x) = \log(10)$ y $log_e(x) = \ln(x)$.

Ejemplos:

a) $log_3 81 = 4$ porque $3^4 = 81$

b) $log_5 125 = 3$ porque $5^3 = 125$

c) $log\ 100000 = 5$ porque $10^5 = 100000$

d) ln e = 1 porque e^1 = e

14.1 Propiedad Fundamental de los Logaritmos

$$b^{log_b x} = x$$

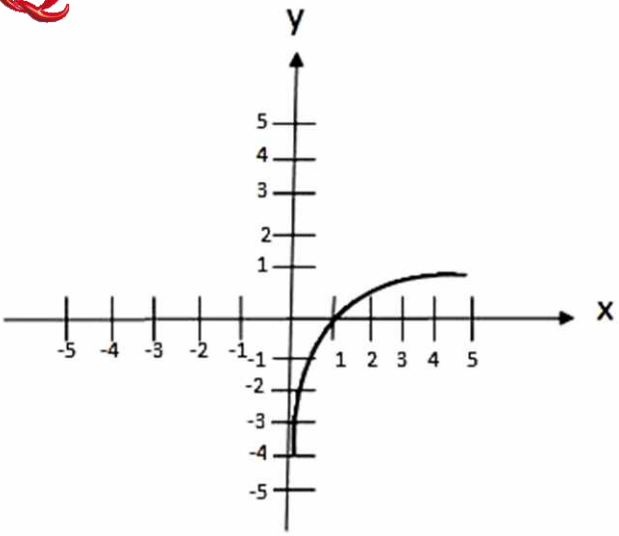
Esta propiedad nos dice que si elevamos la base al logaritmo del número con respecto a esa base, el resultado es el mismo número. En otras palabras, el logaritmo de un número real positivo es el exponente a que hay que elevar una base real positiva y distinta de uno para obtener el número dado.

La relación anterior define una función llamada logarítmica tal que a cada número real positivo se le asocia su correspondiente logaritmo en una base dada.

La función $IR^+ \rightarrow$ IR, definida por $f_{(x)} = log_b x,$

siendo b $\in$ $IR^+ \wedge$ b $\neq$ 1 es la función logarítmica.

Representamos gráficamente esta función par b= 2.



X	f(x) = $log_2 X$
4	f(4) = $log_2 4 = 2$
2	f(2) = $log_2 2 = 1$
1	f(1) = $log_2 1 = 0$
$\frac{1}{2}$	f($\frac{1}{2}$) = $log_2(\frac{1}{2}) = -1$
$\frac{1}{4}$	f($\frac{1}{4}$) = $log_2(\frac{1}{4}) = -2$
$\frac{1}{8}$	f($\frac{1}{8}$) = $log_2(\frac{1}{8})$ = -3

Características de la Curva Logarítmica

1) Para una base mayor que uno, la curva es creciente (aunque muy lentamente).

2) La función logarítmica es inyectiva.

3) Los logaritmos de los números mayores que uno, son números reales positivos.

4) Los logaritmos de los números reales entre cero y uno, son negativos.

5) Los números negativos no tiene logaritmo (en IR).

6) Desde el punto de vista de las funciones, la función logarítmica es la inversa de la función exponencial, con respecto a la misma base. Ambos gráficos son simétricos con respecto a la recta y=x.

14.2 Propiedades de los logaritmos

Puesto que los logaritmos son exponentes, las propiedades de los logaritmos corresponden a las propiedades de los exponentes. Dichas propiedades, en notación logarítmica, se escriben así:

14.2.1 El logaritmo de uno es cero.

$$log_b 1 = 0$$

14.2.2. El logaritmo de la base es igual a uno.

$$log_b b = 1$$

14.2.3 El logaritmo de una potencia de la base es igual al exponente.

$$log_b(b^n) = n$$

14.2.4 El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$log_b(mn) = log_b(m) + log_b(n)$$

14.2.5 El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia entre el logaritmo del numerador y el logaritmo del denominador.

$$log_b(\frac{m}{n}) = log_b(m) - log_b(n)$$

14.2.6 El logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base.

$$log_b(m^n) = n\ log_b(m)$$

14.2.7 El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo de la cantidad subradical dividido por el índice de la raíz.

$$log_b(\sqrt[n]{m}) = \frac{log_b(m)}{n} =$$

14.2.8 Fórmula del cambio de base:

$$log_b(x) = \frac{log_c(x)}{log_c(b)} \quad \forall b, c \in IR^+ \wedge b,c \neq 1$$

14.3 Ecuaciones logarítmicas

Son aquellas en que la incógnita aparece en el argumento del logaritmo.

Ejemplos:

a) $log_3(x) = 4$

b) $log_2(x^2 + 1) = 0$

c) $log(2x + 1) - log(x) = log(3x)$

d) $log\left(\frac{x-1}{x}\right) + log(x) = -1$

Para resolverlas se debe aplicar la definición de logaritmo y el hecho de que la función logarítmica es inyectiva.

Importante:

La(s) solución(es) de toda ecuación logarítmica debe(n) ser comprobada(s) en la ecuación original y debe(n) descartarse aquella(s) que no la satisfaga(n).

Ejemplo:

El(os) valor(es) de x en la ecuación $log_{10}(x^2-6x-6) = 1$ es (son):

Solución:

De acuerdo con la definición de logaritmo (en base 10), se tiene:

$$log_{10}(x^2 - 6x - 6)=1 \leftrightarrow x^2 - 6x - 6 = 10^1=10 \leftrightarrow x^2 - 6x - 16 = 0$$

Ecuación de segundo grado cuyas soluciones son:

$x_1 = 8$ y $x_2 = -2$

Comprobación

$$x_1 = 8$$

$$log_{10}\ (8^2\text{-}6 * 8 - 6) = log\ _{10}(64\text{-}48\text{-}6) = log_{10}(10) = 1$$

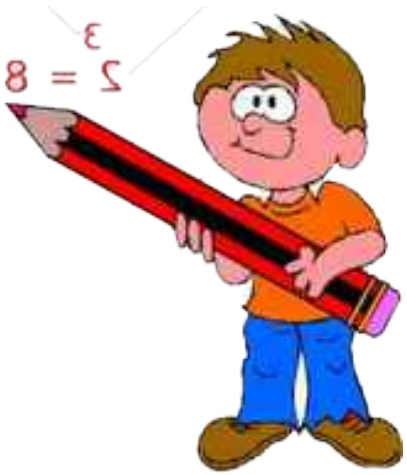
¡Correcto!

$$x_2 = -2$$

$$log_{10}((-2)^2\ \text{-}6\ (\text{-}2)\ \text{-}6\ ) = log_{10}(4 + 12 - 6) = log_{10}(10) = 1$$

¡Correcto!

Luego las soluciones son $x_1 = 8$ ó $x_2 = -2$



UNIDAD 2

EVALUACION

1. Un estilógrafo y un lapicero costaron $3.600. Al precio del estilógrafo le descontaron $600, lo que fue equivalente a pagar el lapicero más $800. El precio del lapicero fue de:

A. $1.400 menos de lo que costó el estilógrafo.
B. Menos de la mitad del costo de los dos.
C. El doble del costo del estilógrafo menos $2.000.
D. La mitad del costo del estilógrafo más $100.

Los gerentes de producción, financiero y gerencia general, están reunidos tratando sobre los gastos de administración y las unidades de envases plásticos producidas, deduciendo que cuando por problemas producción no sacaba unidades, los gastos de administración ascienden a $500 diarios y son de $1.000 diarios cuando se sacaba una producción de mil unidades. Si el costo total diario lo llamamos Z, el cual se relaciona linealmente con la producción diaria total determinada por P, la ecuación que relaciona Z con P es:

A. Una ecuación cuadrática, puesto que los gastos de administración son variables.
B. La expresada por $Z = \frac{1}{2}P + 500$
B. Una ecuación lineal de pendiente negativa.
C. Es una ecuación de gráfica cuya pendiente es 1000.
D. Un estudiante de matemática le pregunta la hora a un compañero, éste responde “La diferencia de las horas transcurridas con las horas por transcurrir es de 4 horas”; se cumple qué:

A. Son las 4 p.m., porque se cumple: horas transcurridas: X ; horas por transcurrir : 2 4 - X ; $X - (24 - X) = 4$.
B. Son las 2 p.m. ; porque se cumple: horas transcurridas: X ; horas por transcurrir : $24 - X$; $X - (24 - X) = 4$.
C. Son las 4 p.m. ; porque se cumple: horas transcurridas: X ; horas por transcurrir : $12 - X$; $X - (12 - X) = 4$.

D. Son las 2 p.m.; porque se cumple : horas transcurridas: X ; horas por transcurrir : 12 + X ; X – (12 + X) = 4.

2. En cierto colegio de enseñanza personalizada hay 22 estudiantes entre alumnos de tercero y cuarto grado, se les reparte un determinado número de revistas para lectura. A los alumnos de tercero se les da 60 revistas lo mismo que a los alumnos de cuarto. Si se desea conocer el número de alumnos de tercero y cuarto sabiendo que cada uno de éstos recibe una revista menos que un alumno de tercero, se aplicaría el modelo matemático:

A. $60x - 60\ (22 - x) = 1$

B. $\frac{60}{x} - \frac{60}{22-x} = 1$

C. $60\ (22 - x) = 60x$

D. $60\ (22 - x) - 60x = 22x - x^2$

5. Jane le dice a Alexandra: “Yo tengo el triple del dinero que tienes, aumentado en $10.000”, a lo que Alexandra responde: “Tendríamos la misma cantidad si a lo que tengo le agrego $30.000”. Entonces se cumple que:

A. La ecuación a plantearse sería: 3X + 30.000 = 2X + 10.000
B. La ecuación que se deduce es: X + 10.000 = 2X + 30.000
C. La ecuación: 3X = X + 30.000, determina lo que tienen Jane y Alexandra.
D. Lo que tienen Jane y Alexandra se calcula por la ecuación: 3X + 10.000 = X + 30.000

6. En la situación planteada:

A. La proporción entre las cantidades que tienen Jane y Alexandra es de 4 a 1.
B. La proporción entre las cantidades que tienen Jane y Alexandra es de 1 a 4.

C. Las cantidades que tiene Jane y Alexandra están en la proporción 1 a 1.
D. Las cantidades que tiene Jane y Alexandra están en la proporción de 1 a 2.

7. En una oficina de ventas a usted le ofrecen dos planes de pago distintos:

PLAN A: un salario básico mensual de $600, más una comisión del 6% sobre las ventas que superen los $10.000.

PLAN B: un salario básico mensual de $800, más una comisión del 6% sobre las ventas que superen los $10.000.

Según la situación anterior, se puede establecer que:

A. El plan A, es mejor que el plan B, cuando el total de ventas es inferior a $20.000.
B. El plan A, es mejor que el plan B, cuando el total de ventas es superior a $20.000.
C. Sin importar el total de ventas, el plan A, siempre es mejor que el plan B.
D. El plan B, es mejor que el plan A, cuando el total de ventas es inferior a $20.000.

8. De la ecuación planteada: $\frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 + 6x + 10} = 1$; se obtiene:

A. Dos valores iguales para x, e iguales a 2.
B. Dos valores iguales para x, e iguales a $^1/_2$
C. Un valor para x, e igual a $-\,^1/_2$
D. Un solo valor para x e igual a $^1/_2$

9. Hallar tres números enteros consecutivos, tales que la suma de los 2/13 del mayor con los 2/3 del número intermedio equivalga al número menor disminuido en 8. Para solucionar esta situación se debe:

A. Plantear una ecuación lineal.
B. Plantear una ecuación cuadrática.
C. Plantear un sistema de ecuaciones lineales.
D. Plantear una ecuación logarítmica.

10. El modelo matemático que da la solución del problema anterior, es:

A. $\frac{2}{13}(x+1) = y$

$\frac{2}{3}x + y = 8$

B. Log $\log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{13}(x+1) = 8$

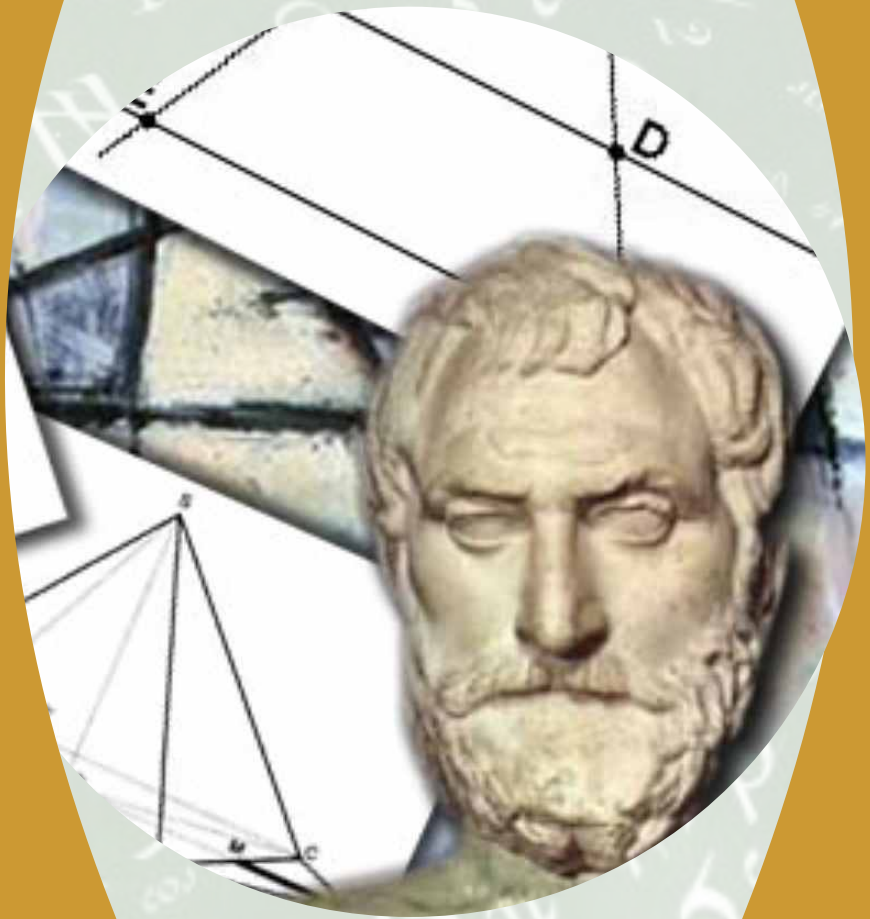
C. $\frac{2}{13}(x+2) + \frac{2}{3}(x+1) = x - 8$

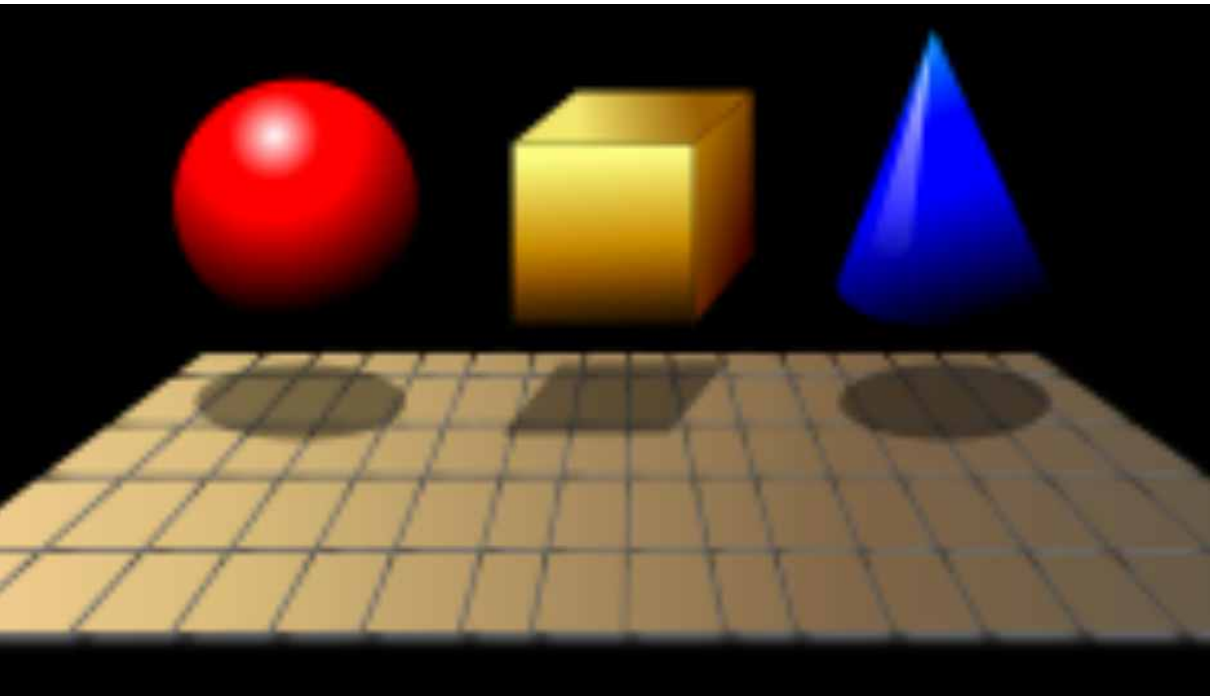
D. $\frac{2}{13}(x+1) + \frac{2}{3}x^2 = 8$

CORPORACION GIQ

UNIDAD 3

GEOMETRÍA





1.- GEOMETRÍA

La Geometría es la disciplina matemática que estudia los elementos del espacio, las relaciones existentes entre ellos y las consecuencias lógicas derivadas de estas relaciones.

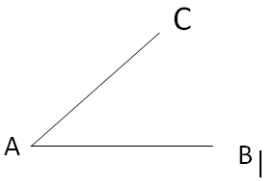
Nuestro estudio se centrará en la **"Geometría Euclidiana Plana"**, cuyas bases fueron sentadas por los griegos hace ya más de 24 siglos.

1.1 Ángulos

Ángulos, es el conjunto de puntos formado por la unión de dos rayos (lados**)** de origen común (Vértice).

En la figura, el ángulo está formado por la unión de los rayos AB y AC, cuyo origen común es el punto A, que es el vértice del ángulo.

Anotamos: ∡ BAC o bien ∡ CAB o simplemente ∡ A o también B Â C



1.2 Medición de Ángulos

Grado Sexagesimal (°)

Es la medida que se le asigna a un ángulo que equivale a 360ava parte de un giro completo.

Por lo cual, un giro completo mide 360 grados sexagesimales, lo que anotamos: 360º

Las subunidades de un grado sexagesimal son el minuto (') y el segundo (").

Las equivalencias entre ellos son: 1º = 60' 1'= 60''

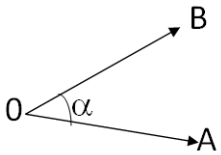
Existen otros sistemas de medición de ángulos: el centesimal, el circular, etc., pero, para nuestros fines sólo ocuparemos del sexagesimal.

1.3 Clasificaciones de Ángulos:

1.3.1 De acuerdo con sus medidas:

a) **Agudos:** Los ángulos son agudos cuando su medida es menor de 90º, pero mayor que cero(0)

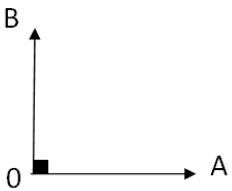
0^0< Angulo Agudo < 90^0



α: Agudo

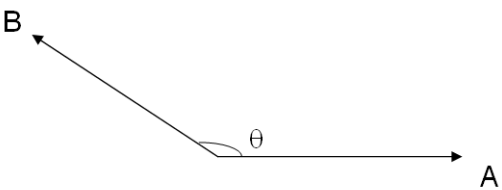
$0^0 < \alpha < 90^0$

b) **Recto:** Un ángulo es recto cuando su medida es de 90º
Angulo Recto = 90º



m (A Ô B) = 90^0

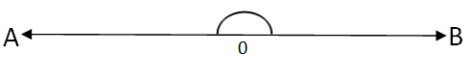
c) **Obtuso:** Un ángulo es obtuso cuando su medida es mayor de 90º pero menor de 180º



90^0 < Angulo θ obtuso <180^0

90°< θ <180°

d) **Llano:** Un ángulo es llano cuando su medida es de 180º



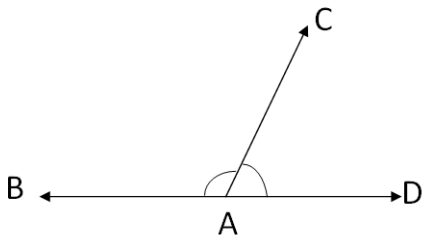
Ángulo Llano= 180^0

m (A Ô B) = 180^0

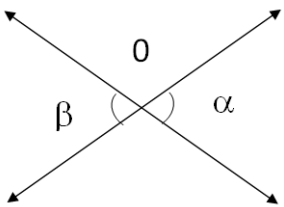
1.3.2 Ángulos en el Plano

a) Ángulos Adyacentes: Dos ángulos son adyacentes sí y sólo sí tienen en común el vértice y el lado, y sus interiores no se interceptan. Además la suma de sus medidas es 180º.

$\measuredangle$ BAC adyacente con $\measuredangle$ CAD

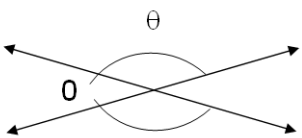


b) Opuestos por el vértice: Son aquellos ángulos que se forman por las prolongaciones de los lados de uno de ellos, a continuación del vértice.



α y β son opuestos

$\alpha \cong \beta$

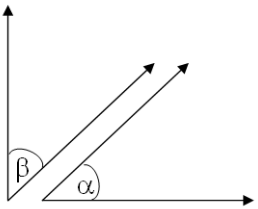


$\theta = \Phi$ opuesto por el vértice

$\theta \cong \Phi$

El símbolo ≅ se lee “Congruente con……”

c) Ángulos Complementarios: Son aquellos ángulos cuya suma de medidas es igual a 90º.

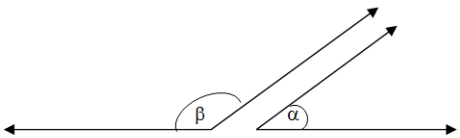


$\alpha + \beta = 90^0$

α y β son complementarios

d) Ángulos Suplementarios: Son aquellos ángulos cuya suma de medidas es igual a 180º.

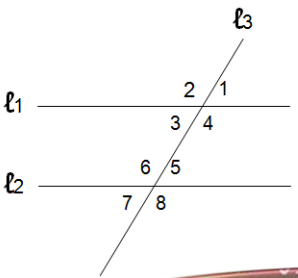
$\alpha + \beta = 180^0$



α y β son suplementarios

1.3.3 Ángulos entre Paralelas y una Transversal

Si dos rectas paralelas se cortan por otra recta transversal, se determina 8 ángulos; entre los cuales hay parejas que cumplen propiedades importantes.



En la figura se tienen dos rectas paralelas ($\ell_1 \parallel \ell_2$) , y una recta transversal ℓ_3 . Según su ubicación, los ángulos determinados reciben distintos nombres:

a) Opuestos por el vértice

Son congruentes.

$$\measuredangle 1 \cong \measuredangle 3; \measuredangle 2 \cong \measuredangle 4; \measuredangle 6 \cong \measuredangle 8; \measuredangle 5 \cong \measuredangle 7$$

b) Ángulos Correspondientes

Al trasladar ℓ_1 paralelamente hasta hacerla coincidir con ℓ_2 se superpone ciertos ángulos, éstos reciben el nombre de correspondientes, y obviamente son congruentes:

$$\measuredangle 1 \cong \measuredangle 5; \measuredangle 2 \cong \measuredangle 6; \measuredangle 3 \cong \measuredangle 7; \measuredangle 4 \cong \measuredangle 8$$

c) Ángulo Alternos Internos

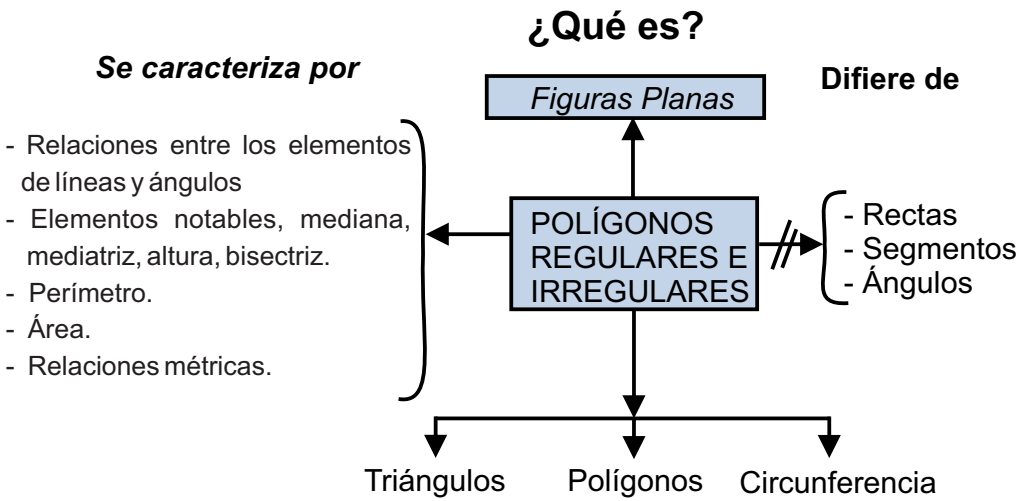
Son los que están entre las paralelas y a distinto lado de la transversal. Los ángulos alternos internos son congruentes:

$$\measuredangle 3 \cong \measuredangle 5; \measuredangle 4 \cong \measuredangle 6$$

a) Ángulos Alternos Externos

Son los que están en el exterior de las paralelas y a distinto lado de la transversal. Los ángulos alternos externos son congruentes:

$$\measuredangle 1 \cong \measuredangle 7; \measuredangle 2 \cong \measuredangle 8$$



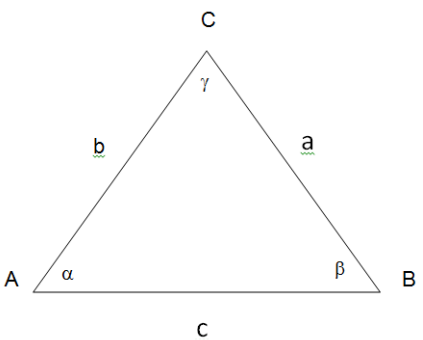
2. TRIÁNGULOS

Un **triángulo** lo podemos entender como la unión de tres segmentos determinados por tres puntos no colineales. Estos tres puntos se denominan **vértices**, y los segmentos, **lados** del triángulos; además, se determinan tres ángulos, cuyos lados son lados del triángulo, y se denominan **ángulos interiores** del triángulo.

A, B, C : vértices

$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$: Lados

α, β, γ : Ángulos interiores



Se acostumbra usar letras minúsculas para los lados, de acuerdo con el vértice al que se oponen.

Teorema Fundamental

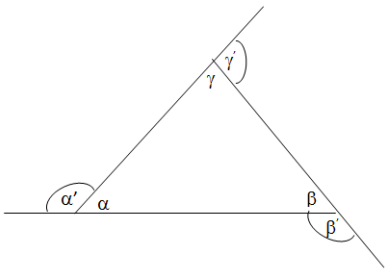
"En todo triángulo, la suma de las medidas de los ángulos interiores es 180º

$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$

Ángulo Exterior

Se llama ángulo exterior de un triángulo, al ángulo formado por un lado del triángulo y la prolongación del otro.

α', β',γ': Ángulos exteriores



Propiedades

i) La medida de un ángulo exterior es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes.

$$\alpha' = \beta + \gamma$$
$$\beta' = \alpha + \gamma$$
$$\gamma' = \alpha + \beta$$

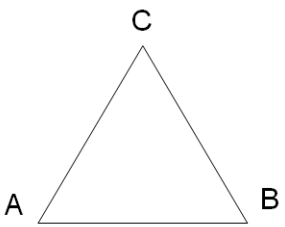
ii) La suma de las medidas de los ángulos exteriores de un triángulo es 360º.

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^0$$

2.1. Clasificación de los triángulos

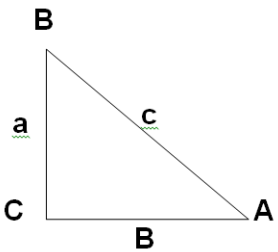
2.1.1 Según la medida de los ángulos

a) Acutángulo: Es aquel que tiene sus tres ángulos interiores agudos.



b) Rectángulo: Es aquel que tiene un ángulo recto. Los otros dos ángulos son agudos y complementarios.

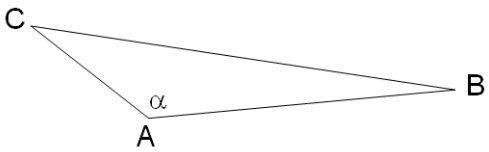
Los lados que forman el ángulo recto se denominan **"catetos"** y el lado opuesto al ángulo recto, **"hipotenusa"**.



Δ ABC rectángulo en C, a y b: catetos; c: hipotenusa

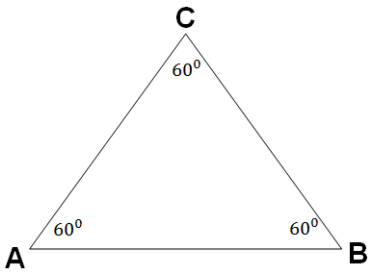
c) Obtusángulo: Es aquel que tiene un ángulo interior obtuso.

$\alpha > 90^0$



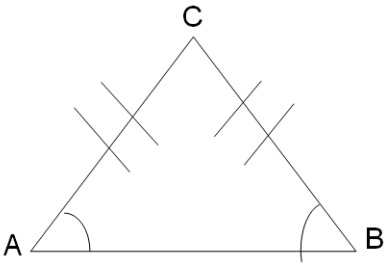
2.1.2 según la medida de sus lados

a) Equilátero: Tiene sus tres lados congruentes; por lo tanto, sus tres ángulos también lo son, y como la suma de sus medidas es 60º

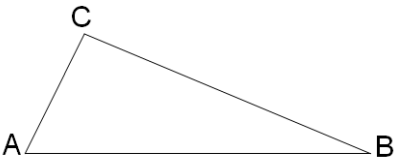


b) Isósceles: Es aquél que tiene dos lados congruentes.

Se puede demostrar que los ángulos opuestos a los "lados" congruentes son también congruentes. A estos ángulos se les llama "ángulos basales".

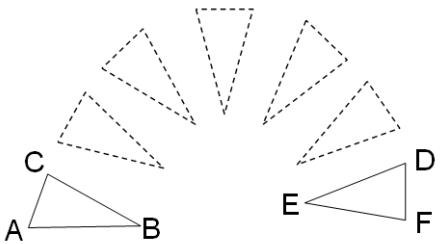


c) Escaleno: Es aquél cuyos tres lados tienen distinta medida, y por ende, sus ángulos también.



2.2 Congruencia

La idea intuitiva de congruencia es que dos figuras son congruentes si al mover una de ellas, coincide exactamente con la otra:

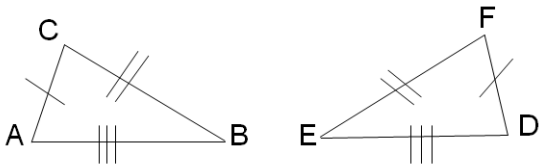


En la figura anterior, el triángulo ABC, calza exactamente con el triángulo FED, si se hacen coincidir los siguientes vértices:

A – D; B – E; C – F,
Lo que resumiremos con la siguiente notación: Δ ABC $\cong$ Δ DEF,
la que es muy útil, puesto que a partir de ella podemos determinar los lados, ángulo y vértices que se corresponden en la congruencia.

Por ejemplo: Al lado AB (primera y segunda letra de la izquierda) le corresponde el lado DE (primera y segunda letra de la derecha).

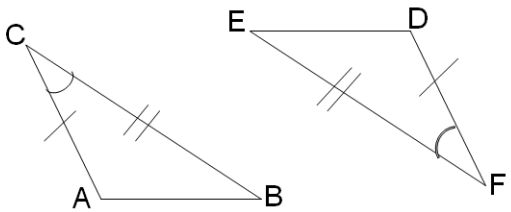
Es decir, si tenemos ΔABC $\cong$ DEF, deducimos que:



Δ ABC $\cong$ Δ DEF

b) Criterio Lado – Ángulo – Lado (LAL)

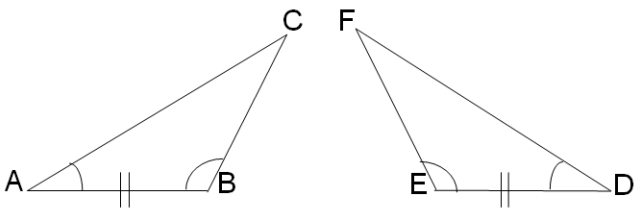
"Si dos triángulos tienen dos lados correspondientes congruentes y el ángulo comprendido por estos lados, también congruente a su correspondiente, entonces los triángulos son congruentes".



Δ ABC $\cong$ Δ DEF

c) Criterio Ángulo – Lado – Ángulo (ALA)

Dos triángulos son congruentes si dos ángulos y el lado comprendido entre ellos, de uno de los triángulos, son congruentes con dos de los Ángulos y el lado comprendido entre ellos del otro triángulo.



$AB \cong DE$ $\quad\quad$ $\angle ABC \cong \angle DEF$

$AC \cong DF$ $\quad\quad$ $\angle CAB \cong \angle FDE$

$BC \cong EF$ $\quad\quad$ $\angle ACB \cong \angle DEF$

Definición

Dos triángulos son congruentes sí y sólo sí, existe una correspondencia entre los vértices, tal que:

1) Cada par de lados correspondiente son congruentes.
2) Cada par de ángulos correspondientes son congruentes.

Observación: Al establecer la congruencia entre dos figuras, anótela en el orden adecuado, esto le permitirá identificar los lados y los ángulos correspondientes sin necesidad de ocupar las figuras.

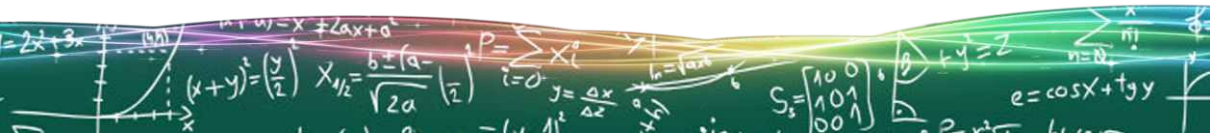
Criterios de Congruencia de Triángulos

Según la definición anterior, para poder establecer una congruencia, deberíamos establecer una correspondencia entre los vértices, de modo que se cumpla la congruencia entre los lados y los ángulos correspondientes, lo que resulta muy laborioso.

Al trabajar con triángulos podemos establecer menos relaciones entre elementos correspondientes y aseguramos la congruencia entre los triángulos, esto nos viene dado por los denominados **criterios** o **postulados de congruencia de triángulos.**

a) Criterio Lado – Lado –Lado (LLL)

"Si dos triángulos tienen sus lados correspondientes congruentes, entonces los triángulos son congruentes".



2.3 Elementos del Triángulo

Se denominan "**Elementos Primarios"** del triángulo a sus lados y ángulos. Los **"Elementos Secundarios"** del triángulo son los llamados "**Puntos Notables"** y **"Rectas Notables".**

Rectas Notables: Se llaman así a las alturas, Bisectrices, Medianas y Mediatrices.

Puntos Notables: Son los puntos que surgen de la intersección de un mismo tipo de rectas notables, ellos son: El centro de gravedad (Baricentro), El Ortocentro, el Incentro y el Circuncentro.

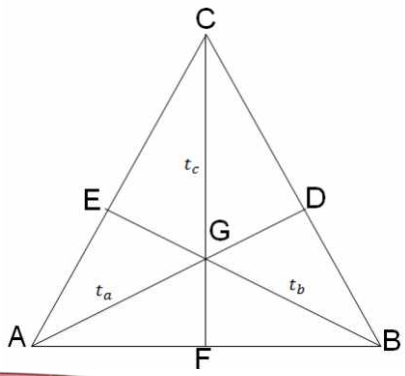
2.3.1 Mediana

Es la recta que une un vértice, con el punto medio del lado opuesto.

Las tres transversales de gravedad se interceptan en un mismo punto llamado **Centro de Gravedad** (o Baricentro).

D, E, F: Puntos medios de los lados.

$\overline{AD};\overline{BE};\overline{CF}$ Son las medianas del triángulo ABC. G: Centro de Gravedad (o Baricentro).



Propiedad: El Baricentro divide a cada transversal de gravedad en dos segmentos que están en razón 2:1. El segmento que va desde el vértice al Baricentro mide el doble que el segmento que va del baricentro al lado.

$$\frac{AG}{GD} = \frac{BG}{GE} = \frac{CG}{GF} = \frac{2}{1}$$

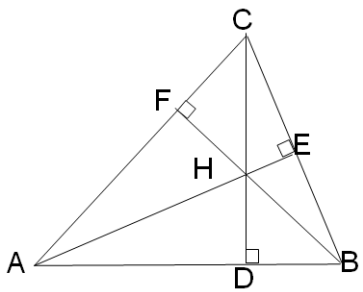
2.3.2 Altura

Es la perpendicular trazada desde un vértice al lado opuesto.

Las tres alturas se interceptan en un mismo punto llamado Ortocentro.

$$\overline{AE} \perp \overline{BC};\ \overline{BF} \perp \overline{AC};\ \overline{CD} \perp \overline{AB}$$

AE; BF; CD, son las alturas del triángulo ABC.



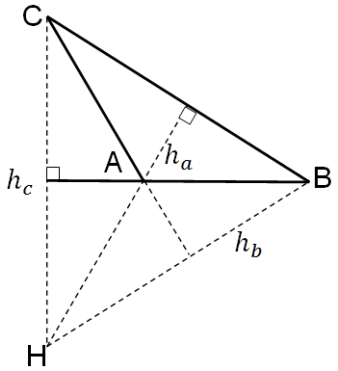
Propiedad: Las alturas de un triángulo son inversamente proporcionales a los lados:

$$A * h_a = b * h_b = c * h_c = k$$

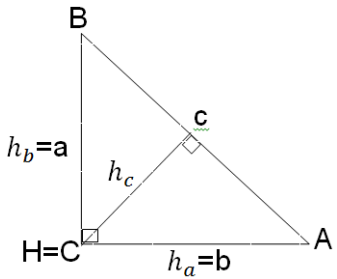
¿Qué representa la constante k del triángulo ABC?

Observaciones

- En un triángulo obtusángulo el ortocentro queda en el exterior del triángulo.



-En un triángulo rectángulo, el ortocentro coincide con el vértice del ángulo recto, puesto que los catetos se confunden con las alturas.



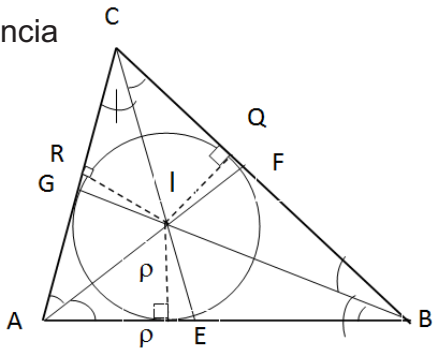
2.3.3 Bisectriz

Es la recta que pasa por un vértice y divide al ángulo en dos ángulos congruentes. Las tres bisectrices se interceptan en un mismo punto llamado incentro, el cual corresponde al centro de la circunferencia inscrita al triángulo, es decir, el incentro equidista de los lados del triángulo. El radio de esta circunferencia se designa por la letra griega "ρ" (rho).

$\overline{AF}$; $\overline{BG}$; $\overline{CE}$ Son las bisectrices del triángulo ABC.

I: Incentro

P, Q, R: Puntos de Tangencia



Observación

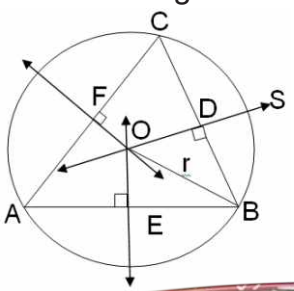
Si se dibujan las bisectrices de los ángulos exteriores de un triángulo, se determinan tres puntos que equidistan de los lados del triángulo. Dichos puntos son los "Excentros" o centros de las circunferencias exinscritas al triángulo.

2.3.4. Mediatriz

Es la recta perpendicular a un lado del triángulo, en su punto medio.

El punto de intersección de las mediatrices se denomina **Mediacentro** y corresponde al centro de la Circunferencia Circunscrita al triángulo, es decir, el circunscentro es un punto que equidista de los tres vértices del triángulo. Su radio se designa por "r".

$\overline{OD};\overline{OF};\overline{OE}$ Son las mediatrices del triángulo ABC.



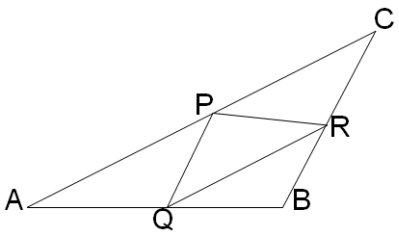
Observación

En general las mediatrices no pasan por los vértices del triángulo.

2.3.5 Propiedad de los puntos medios

En el segmento que une un vértice del triángulo con el punto medio de su lado opuesto.

P, Q, R: Puntos Medios de cada lado.



Propiedades

- La mediana es paralela al tercer lado:

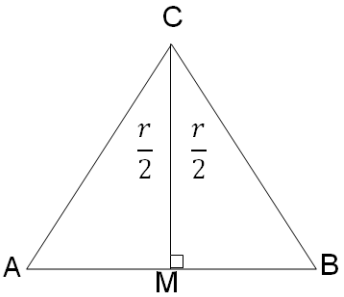
  $\overline{RP} \parallel \overline{AB}$; $\overline{QR} \parallel \overline{AC}$;$\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$

- La mediana mide la mitad del lado al cual es paralela:
  AB = 2PR, BC =2PQ; AC = 2QR

- Cuando se dibujan las tres medianas de un triángulo, se forman cuatro triángulos congruentes.

Nota
En general, las cuatro primeras rectas notables no coinciden, excepto en los triángulos equiláteros e isósceles.

Sea ABC un triángulo isósceles de base $\overline{AB}$ entonces la bisectriz, la mediatriz, y la mediana de gravedad relativas a la base $\overline{AB}$ coinciden. Para los otros lados, esto no acontece.



Ahora sí, si el triángulo es equilátero, cada lado puede ser tomado como base de un triángulo isósceles, luego, coinciden las rectas notables de cada lado (excepto medianas), con lo cual, los puntos notables se confunden en uno solo.

2.4 Desigualdades en el triángulo

Es importante tener presente que, en todo triángulo, se cumple:

i) A mayor ángulo, se opone mayor lado y viceversa.

ii) La suma de las medidas de las longitudes de los dos lados cualesquiera es mayor que la medida de la longitud del tercer lado.

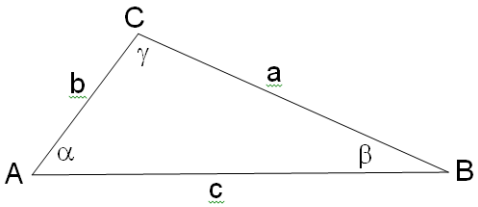
iii) La diferencia positiva entre las medidas de las longitudes de dos lados cualesquiera es menor que la medida de la longitud del tercer lado.

Así, en Δ ABC de la figura:

i) $\Upsilon > \alpha > \beta \leftrightarrow c > a > b$

ii) $a+b>c, b+c>a, a+c>b$

iii) $a-b<c, c-a<b, c-b<a$



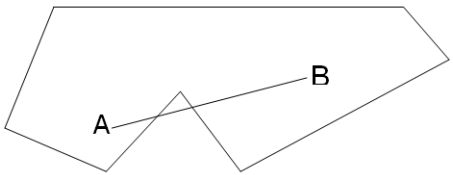
3. POLÍGONOS

3.1 Clasificación de los polígonos

Los polígonos se clasifican en Cóncavos y Convexos.

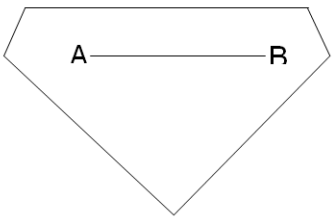
3.1.1 Polígono Cóncavo

Es aquel donde es posible encontrar al menos dos puntos en la región interior, tal que el segmento que determinan no está enteramente incluido en dicha región.



3.1.2 Polígono Convexo

Es aquel en que para todo par de puntos de la región interior, el segmento que determinan está íntegramente contenido en dicha región.



Observación: Por comodidad, de ahora en adelante, al polígono convexo le denominaremos simplemente polígono.

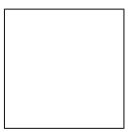
Propiedad de los polígonos
La suma de los ángulos interiores de un polígono de "n" lados es:

$$\Sigma \measuredangle_i = 180^0(n - 2)$$

3.2 Polígonos Regulares

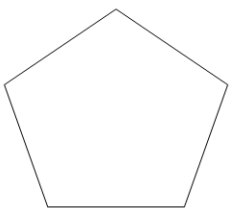
"Un polígono se llama regular si tiene sus lados y sus ángulos respectivamente congruentes".

Ejemplos



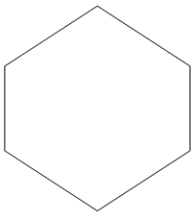
n=4

Cuadrilátero Regular (cuadrado)



n= 5

Pentágono Regular



Hexágono Regular

4. CUADRILÁTERO

Los cuadriláteros se clasifican según el número de pares de lados paralelos en:

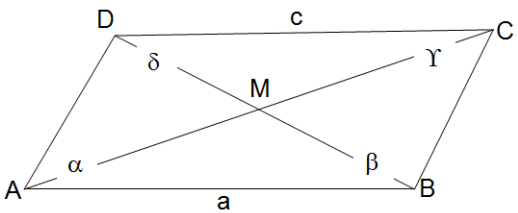
-Paralelogramos: Dos pares de lados paralelos.

-Trapecios: Un par de lados paralelos.

-Trapezoides: Ningún par de lados paralelos.

4.1 Paralelogramos

Sus lados opuestos son paralelos entre sí. Son paralelogramos: el **Cuadrado**, el **Rectángulo**, el **Rombo** y el **Romboide**.



Propiedades Generales de los Paralelogramos

a) Lados opuestos congruentes: $a \cong c$; $b \cong d$
b) Los ángulos opuestos congruentes: $a \cong \Upsilon$; $\beta \cong \delta$

c) Ángulos contiguos suplementarios:

$\alpha + \beta = \beta + \Upsilon = \Upsilon + \delta = \delta + a = 180^0$

d) Las diagonales se dimidian: AM = MC y BM = MD

e) Cada diagonal divide el paralelogramo en dos triángulos congruentes:

Δ ACD $\cong \Delta$ CAB y Δ DAB $\cong \Delta$ BCD

4.2 Trapecios

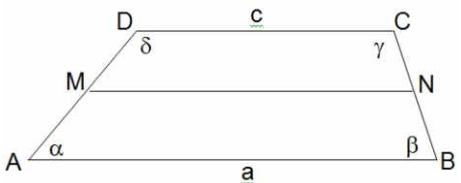
Son cuadriláteros que tienen un solo par de lados paralelos entre sí. Los lados paralelos se denominan "bases", y los no paralelos "lados".

Se clasifican en: Trapecios Escalenos, Isósceles y Rectángulos.

Propiedades Generales de los Trapecios

En la figura: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

a) Ángulos adyacentes a los lados paralelos, son suplementarios: $\alpha + \delta = \beta + \gamma = 180^0$



b) El segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos se llama mediana y su medida equivale a la semisuma de las medidas de las bases.

$$MN = \frac{a+c}{2}$$

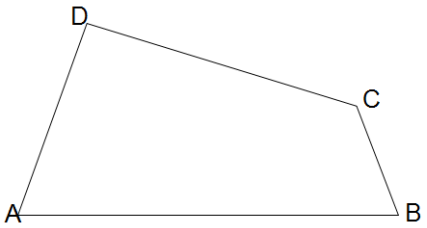
c) La mediana es paralela a las bases:

$$\overline{AB} \parallel \overline{MN} \text{ y } \overline{MN} \parallel \overline{DC}$$

Trapezoides

Son cuadriláteros que no tienen pares de lados paralelos.

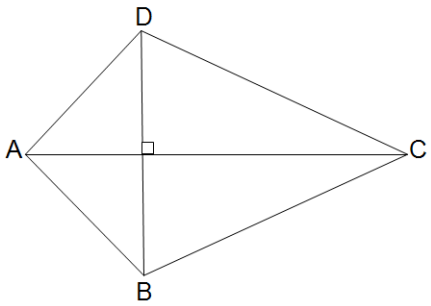
Poseen sólo las propiedades generales relativas a los cuadriláteros, que se deducen de las propiedades de los polígonos.



Observación:

Existe un tipo especial de trapezoides llamados “DELTOIDES”. Tienen dos pares de lados congruentes, pero no paralelos. Presentan simetría respecto a una de sus diagonales. Las diagonales de esos cuadriláteros son perpendiculares y una de ellas es bisectriz de los ángulos interiores correspondientes. El deltoide, se puede considerar formado por dos triángulos isósceles no congruentes que tienen bases de igual medida.

$\overline{AC} \perp \overline{BD}$



Diámetro: Se denomina así, a cualquier cuerda que pasa por el centro.

Recta Secante: Es aquella recta que corta a la circunferencia en dos puntos.

Recta Tangente: Es la recta que intercepta a la circunferencia en un solo punto.

Ángulo del Centro: Es aquel que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y sus lados son radios de ella.

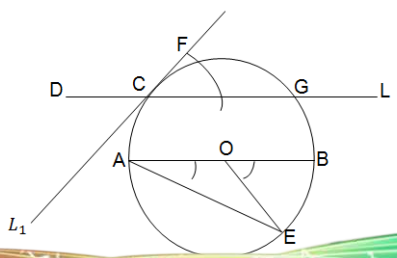
Ángulo Inscrito: Es aquel que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son secantes a ella.

Ángulo Seminscrito: Es aquel que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son una tangente y una secante.

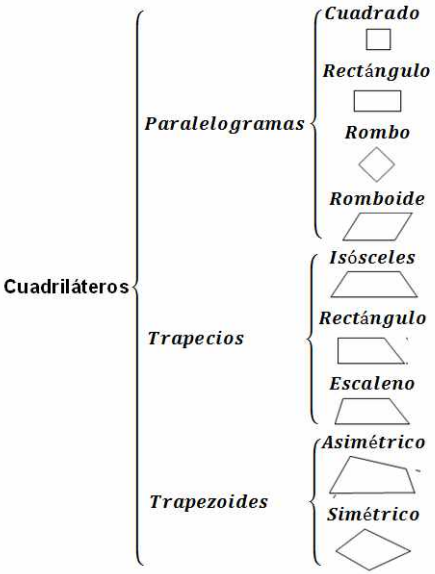
Arco: Es la parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos cualesquiera de ella.

En la figura se tiene:

$\overline{OB}$: Radio
$\overline{AB}$: Diámetro
$\overline{AE}$: Cuerda
L: Recta secante
L1: Recta tangente
$\measuredangle$BOE: Ángulo del centro
$\measuredangle$EAB: Ángulo inscrito
$\measuredangle$FCG: Ángulo seminscrito
EB, GCA: arcos



CLASIFICACIÓN DE LOS CUADRILÁTEROS



5. CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

Definiciones

Circunferencia: Es una línea curva cerrada plana, cuyos puntos equidistan de un mismo punto llamado **centro**.

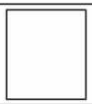
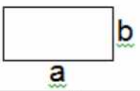
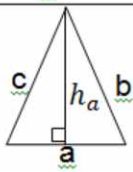
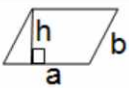
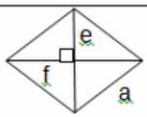
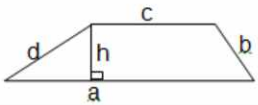
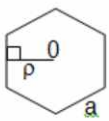
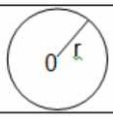
Círculo: Es la superficie plana limitada por la circunferencia.

Radio: Se denomina así tanto a cualquier segmento que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de ella, como a la magnitud de este segmento.

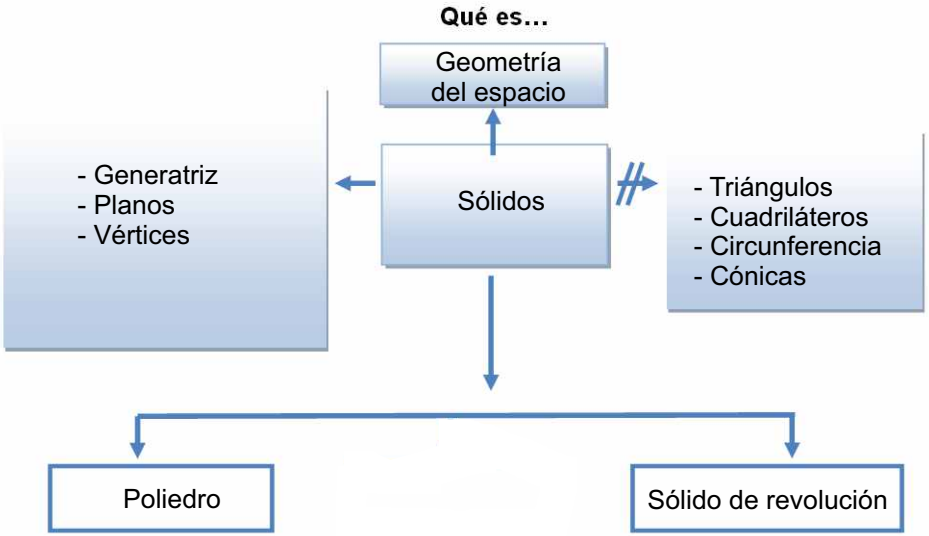
Cuerda: Es un segmento que une dos puntos de la circunferencia.

6. PERÍMETROS-ÁREAS

A continuación se resume las áreas y perímetros de las principales figuras.

Figura y sus elementos	Representación	Área	Perímetro
Cuadrado		a^2	4a
Rectángulo a,b:lados		ab	2(a+b)
Triángulo a,b,c:lados h_a=altura		$\frac{a*h_a}{2}$	a+b+c
Paralelogramo a,b:=lados h:altura		a*h	2(a+b)
Rombo a: lado e,f:diagonales		$\frac{e*f}{2}$	4a
Trapecio a,c :bases b,d: lados		$\frac{a+c}{2}$ *h	a+b+c+d
Polígono Regular (de n lados) a: lado ρ: apotema		$\frac{a*\rho}{2}$*n	a*n
Círculo r:radio o:centro		πr^2	2πr

7. GEOMETRÍA DEL ESPACIO



7.1 Poliedros

Son los cuerpos en el espacio o sólidos que poseen las dimensiones largo, ancho y altura o profundidad.

Un Poliedro, está limitado por planos que son polígonos, denominados caras del poliedro. Los lados de los polígonos son las aristas del poliedro.

El punto de corte de dos o más aristas se denomina vértice del poliedro.

En todo poliedro se cumple que “El número de caras (c), más el número de vértices (v) es igual al número de aristas (A) más dos”.

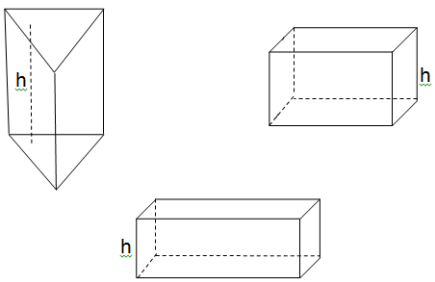
$$C + V = A + 2$$

7.1.1 Prismas:

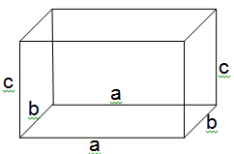
Son los poliedros que presentan lados paralelos (Bases) y los otros son Rectángulos o Paralelogramos. Un prisma es recto cuando las bases y los otros lados son perpendiculares.

Una prisma es regular cuando sus bases son polígonos regulares.

Los prismas pueden ser; triangular, cuadrangular, pentagonal etc., Depende del número de lados de La base.



h: Altura; Distancia entre las caras



Área Lateral

A_1 = $(2a + 2b)$c

A_1 = Perímetro de la base por la altura

Área Total

A_T = 2ac +2bc +2ab

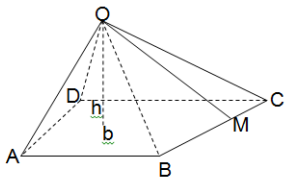
A_T = A_1 + 2 Bases

Volumen= V = a*b*c

V= Área de la base x altura

7.1.2 Pirámide:

Son los poliedros que tienen una base y las caras son triángulos.



Vértice: Punto 0

Arista:

$\overline{CD},\overline{DA},\overline{AB};\overline{BC};\ \overline{OA};\overline{OB},\overline{OC},\overline{OD}$

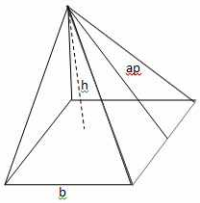
$A_L = \frac{Perimetro\ de\ la\ base * Apotema}{2}$

Altura h: Perpendicular del vértice a la base.

Área Total: $A_T = A_L$ + Base

Apotema Altura de cada cara $\overline{OM}$

Volumen = $\frac{1}{3}$ Base x Altura



ap: apotema

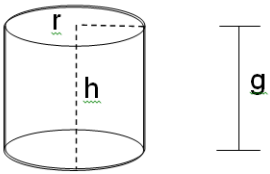
Área Lateral: A_L = ap(a + b)

7.2 Sólidos de Revolución

7.2.1 Cilindro

Se genera al hacer girar un rectángulo sobre un lado considerado como eje de giro.

- Generatriz g
- Altura. Igual a la generatriz h=g
- Radio de la base r



Área Lateral

A_L= Longitud de la circunferencia por generatriz

$A_L = 2\pi rh$

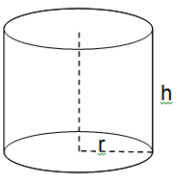
Área Total

A_t= 2 Área de la Base + Área Lateral

$A_t = 2\pi r^2 + 2\pi rh \rightarrow A_t = 2\pi r(r + h)$

Volumen= Área de la base x altura

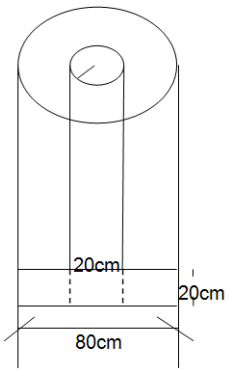
$V = \pi r^2 h$



Ejemplo:

Una rueda compacta como se muestra en la figura, tiene un diámetro interior de 20 cm (parte hueca), un radio externo de 80 cm y un grosor de 20 cm; si se desea disminuir el volumen de la parte compacta en un 20% sin variar el diámetro externo ni el grosor, entonces:

a. El radio interno habría que incrementarse en un 10% porque el nuevo radio sería de 11 cm.
b. El radio interno habría que incrementarse en un 20% porque el nuevo radio sería de 15 cm.
c. Como el radio de la parte hueca quedaría en 20 cm, el radio inicial se incrementó en un 100%.
d. Como el radio de la parte hueca quedaría en 20 cm, entonces el radio inicial se incrementó en un 50%.



100% V_l-V_f= 20% V_l 80% V_l= V_f

$\frac{80}{100}(\pi*40^2)= (\pi*40^2-\pi(10x+2)^2)$

$\frac{8}{10}(1500\pi)= 1600\pi-(10+x)^2\pi$

$(10+x)^2$=1600-1200

$(10+x)^2$= 400

10 + x = 20

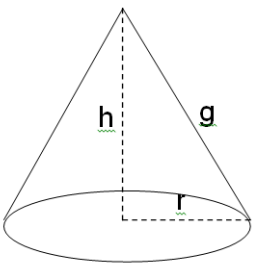
X = 10

RESPUESTA: C

7.2.2 Cono

Se genera al hacer girar un Triángulo Rectángulo sobre un cateto.

Un cateto es altura, el otro cateto radio y la hipotenusa Generatriz.



$A_L = \frac{1}{2}$ (Perímetro de la base x Generatriz)

A_L = πrg

Área Total

A_T= A_L + Área Base

A_T= πrg + πr^2

A_T= πr(g + r)

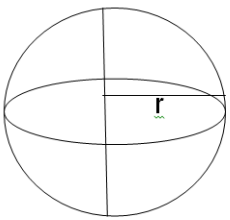
Volumen: V = $\frac{1}{3}$ Base x Altura

V = $\frac{1}{3}\pi r^2$h

7.2.3 Esfera

Se genera al hacer girar una media circunferencia sobre el diámetro.

Todo punto sobre la superficie esférica equidista de un punto fijo llamado centro, esta distancia se llama Radio (r) de la esfera.



Área: $A = 4\pi r^2$

Volumen: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

8. GEOMETRÍA ANALÍTICA - CÓNICAS

La Circunferencia.

Es el conjunto de puntos que equidistan de uno fijo llamado centro.

La distancia de cualquier punto de la circunferencia al centro sellama radio.

Una circunferencia puede tener su centro en el origen (0,0) o en un punto (h,k,).

Si ocurre el primer caso su ecuación es:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Si ocurre el segundo caso su ecuación es:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Ejemplo:

a) Hallar la ecuación de una circunferencia con centro (0,0) y radio = 3.

En este caso la ecuación de la forma $x^2+y^2=r^2$, luego basta con reemplazar r por 3 y se obtiene la ecuación $x^2+y^2=9$

b) Hallar la ecuación de una circunferencia con centro (1,2) y radio 6.

En este caso la ecuación es de forma $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$,

luego como en este caso h =1, k =2 y r =6, basta con remplazar y se obtiene:

$$(x-1)^2+(y-2)^2=6^2.$$

Si se deja de esta manera se dice que la ecuación está en forma canónica y si se desarrollan los cuadrados se obtiene:

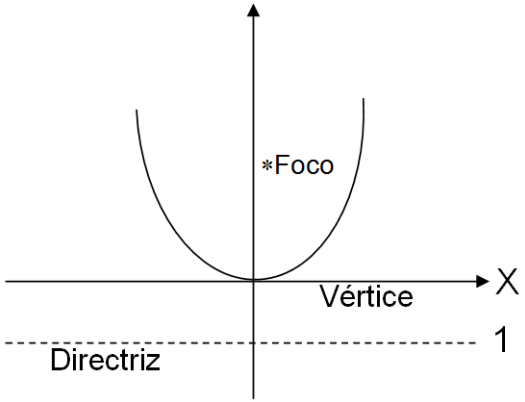
$x^2-2x+1+y^2-4y+4=36$

$x^2+y^2-2x-4y+5=36$

$x^2+y^2-2x-4y-31=0$ y se dice que la ecuación está en forma general.

Parábola

Es el conjunto de puntos (x,y) tales que su distancia a una recta fija llamada directriz es la suma de su distancia a un punto fijo llamado foco que no está sobre la recta.



Ejemplo:

Encontremos la ecuación de la parábola cuyo foco está sobre el eje **y** a una distancia de 4 unidades sobre el origen y su directriz es paralela al eje X y pasa por (0, -4).

Solución:

Como el foco está a 4 unidades del vértice entonces: a = 4.

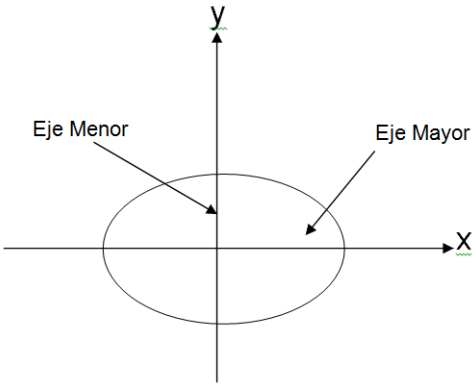
La parábola está sobre el eje **y** por lo tanto es positiva, entonces:

$$P = \{(x,y):x^2 = 4ay\} \rightarrow \{(x,y):x^2 = 4(4)y\} \rightarrow [(x,y):x^2 = 16y\}$$

8.3 Elipse.

Es el conjunto de puntos (x,y) tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos (focos) es constante.

La ecuación de la elipse es:



$$\left\{(x,y): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$$

Ejemplo:

Encontremos los focos para la elipse

$$\{(x,y): 36x^2+4y^2=144\}$$

Dividiendo por 144 a ambos lados se obtiene:

$$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$$

$c^2 = a^2$-b^2= 36 - 4= 32

C = $\sqrt{32}$; c = - $\sqrt{32}$

F_1 = (0, $\sqrt{32}$) , F_2= (0, -$\sqrt{32}$)

EVALUACIÓN

Se tiene un rectángulo de base “a” y altura “h”; se hace girar el rentángulo sobre un eje de rotación que pasa por:

I) El centro de las bases y paralelo a una altura.

II) Un extremo de la base y paralelo a una altura.

1) Acerca de los volúmenes generados en cada caso se afirma que:

a. Los volúmenes generados en I y II son iguales.
b. Los volúmenes generados son cilindros de revolución de igual volumen.
c. Los volúmenes generados son cilindros de revolución de diferente volumen; mayor en I que en II.

d. Los volúmenes generados son cilindros de revolución de diferentes volumen, siendo mayor en II que en I.

2. Al realizar la relación entre los volúmenes de I con respecto a II, se obtiene que es igual a:

a. $V_I = V_{II}$
b. $V_I = 4V_{II}$
c. $V_I = \frac{V_{II}}{4}$
d. $8V_I = V_{II}$

3. Si a = 6cm y h = $5/\Pi$ cm; entonces el volumen para II es igual a:

a. 180º b. 180 rad c. 180 cm^3 d. 180 m^3

Por la Hipotenusa de un triángulo rectángulo, se pasa un eje de giro, sobre el cual hacemos rotar el triángulo.

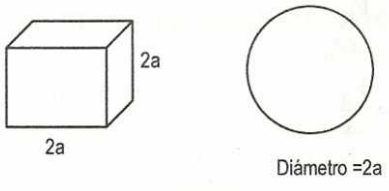
4. Acerca del volumen generado se puede afirmar que:

a. Es un cono, de generatriz un cateto
b. Es un cilindro; de generatriz la altura
c. Es una esfera; de radio igual a la hipotenusa
d. Son dos conos, de generatriz los catetos.

5. Si la hipotenusa mide 25 cm y un cateto mide 20cm. Respecto del volumen total generado, se afirma que:

a. Es de 1200 Π cm^3 y de 9 cm de radio
b. Es de 1200 Π cm^3 y de 12 cm de radio
c. Es de 1200 Π cm^3 y de 15 cm de radio
d. Es de 1200 Π cm^3 y de 200m de radio

La figura muestra un cubo que contiene agua, y una esfera sólida de madera. Se introduce la esfera en el cubo con agua.



6. Con respecto a la expresión
$\frac{4a}{3}(6 - \Pi)$ es correcto;

a. Representa el volumen desalojado de agua.
b. Representa el volumen de agua que queda en el cubo.
c. Cantidad de agua que ocupa la esfera con respecto al cubo.

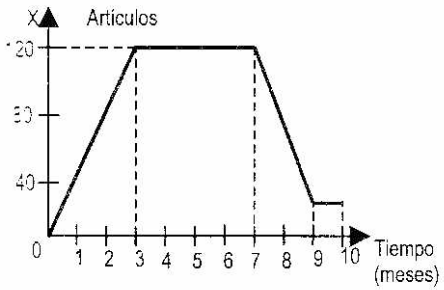
4. El costo de producción de un artículo es de $300 y el precio de venta es de $700. Si el costo fijo de producción es de $12.000 en total se vendieron “X” artículos.
   Sabiendo que: Utilidad = Ingreso Total – Costo Total. Con las condiciones planteadas se tendría que:

A. Para no tener pérdidas se deben producir 40 artículos.
B. Con 50 artículos la utilidad es mínima.
C. Se recuperaría la inversión con 30 artículos.
D. A mayor producción menor ganancia.

5. Si se desea recuperar la inversión, entonces:

A. Se debe vender 30 artículos.
B. Se debe vender 40 artículos.
C. Se debe vender 300 artículos.
D. Se debe vender 12 artículos.

6. Una fábrica de artículos de escritorio, lanza al mercado un novedoso producto, el cual tuvo acogida en el público como se muestra en la gráfica.



De la gráfica se puede concluir que:

A. Se produce una venta constante de artículos en los meses 4°, 5°, 6°,y 7°.

B. Las ventas se incrementan constantemente conforme transcurren los meses.
C. Se produce una venta constante, pero no la misma en los meses 4°, 5°, 6°, 7°y 10°.
D. Las ventas se incrementan en los meses 1°, 2°,3°, 8°, y 9°.

7. La ecuación que relaciona al tiempo (t) y el número de artículos vendidos (x), según la gráfica sería:

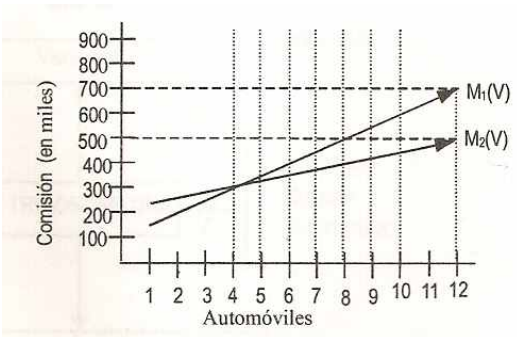
A. X = 40 t; se cumple para toda la gráfica.
B. X = 40 t; sólo en el intervalo (0;3).
C. X = 120 t; en el intervalo (3;7).
D. X = 40 t; en el intervalo (7;9).

Responda las preguntas 8 y 9 de acuerdo al siguiente enunciado.

Un concesionario de la ciudad realiza un concurso entre sus vendedores que consiste en promocionar dos marcas de automóviles, planteándoles que de acuerdo a las unidades vendidas de cada marca, se le pagará una comisión, la cual está dada así:

Comisión marca 1: $M_1 = 50V + 100$
Comisión marca 2: $M_2 = 25V + 200$ (V: automóviles vendidos)

La empresa plantea además que el concurso va desde 1 (uno) hasta 12 (doce) automóviles vendidos de ambas marcas.



La gráfica ilustra las relaciones M_1 (V) y M_2 (V)

8. Si se tiene en cuenta el comportamiento de las relaciones de comisiones por cada marca de automóvil, es correcto afirmar:

A. Cuando un vendedor logra vender cuatro automóviles de cada marca. La comisión que gana por cada marca es la misma.
B. Si se vende menos de cuatro automóviles de cada marca, la comisión de la marca uno siempre será de mayor valor que la comisión de la marca dos.
C. No importa la cantidad de automóviles vendidos, la comisión de la marca dos siempre será mayor que la comisión de la marca uno.
D. Cuando se venden más de cuatro automóviles de cada marca la comisión de M_2 siempre será mayor que M_1.

9. Si se desea vender 8 automóviles de una marca, sería conveniente:

A. Vender de la marca dos, porque la relación entre la comisión y autos vendidos es mayor.
B. Vender de la marca uno, porque la comisión es mayor.
C. Vender de la marca dos, porque su comisión es mayor.
D. Vender de la marca uno, porque la comisión decrece más rápidamente.

EVALUACION

1. A Juan el profesor le da la ecuación $Y-1 = 4PX^2$ la cual corresponde a la ecuación de una parábola. Para hallar P se debe tener en cuenta que:

A. La parábola tiene vértice en (0.0), abre hacia abajo y pasa por el punto (1.0).
B. La parábola tiene un vértice en (0.1), abre hacia abajo y pasa por el punto (-1.0).
C. La parábola tiene un vértice en (0.1), es simétrica con respecto al eje X y pasa por el punto (-1.0).
D. La parábola se abre hacia arriba con vértice en (0.1) y pasa por el punto (-1.0).

2. De la gráfica de la función $f(X) = (X+1)^2 – 3$, se puede afirmar que:

A. Es la misma gráfica de la función $f(X) = X^2$, pero desplazada 1 unidad hacia la izquierda y 3 hacia abajo.
B. Es la misma gráfica de la función $f(X) = X^2$, pero desplazada 1 unidad hacia la derecha y 3 hacia abajo.
C. Es la misma gráfica de la función $f(X) = X^2$, pero desplazada 1 unidad hacia la izquierda y 3 hacia arriba.
D. Es la misma gráfica de la función $f(X) = X^2$, pero desplazada 1 unidad hacia la derecha y 3 hacia arriba.

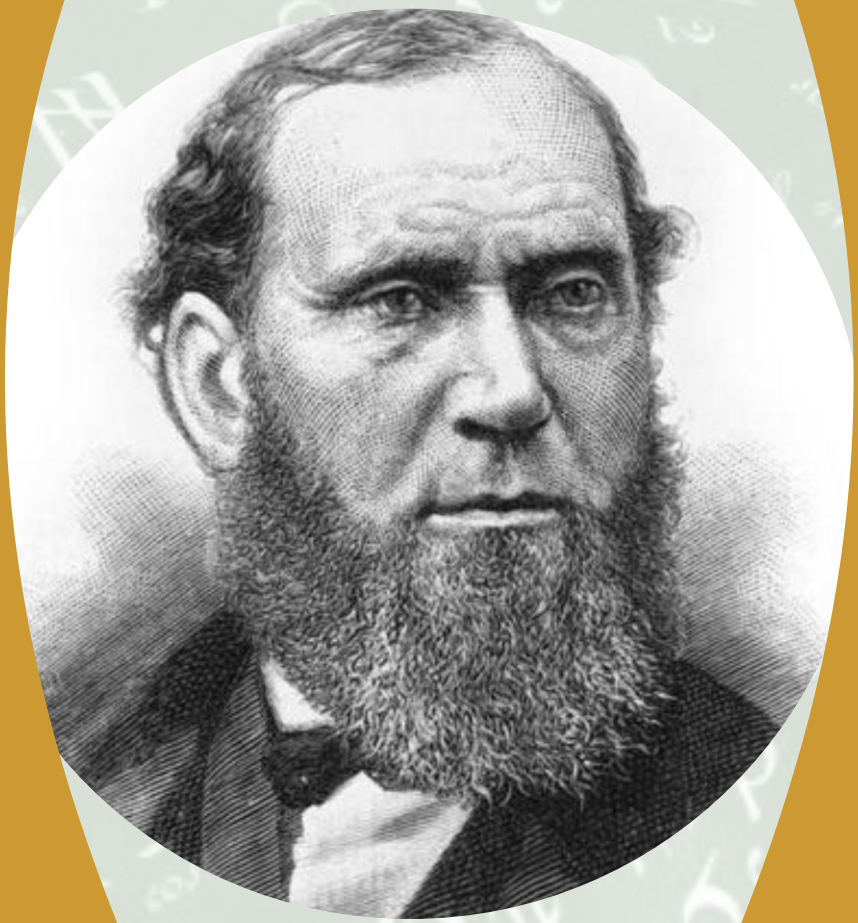
3. El costo de producción de un artículo es de $300 y el precio de venta es de $700. Si el costo fijo de producción es de $12.000 en total se vendieron “X” artículos.
   Sabiendo que: Utilidad = Ingreso total – Costo total. Podemos afirmar que:

A. La utilidad $U_{(x)}$ está dado por: $U_{(x)} = 700X – (300X + 12.000)$.
B. La función utilidad sería: $U_{(x)} = 400X$.
C. La ecuación que representa la utilidad: $U_{(x)} = 400X + 12.000$.
D. La utilidad $U_{(x)}$ está dada por: $U_{(x)} = 1.000X + 12.000$

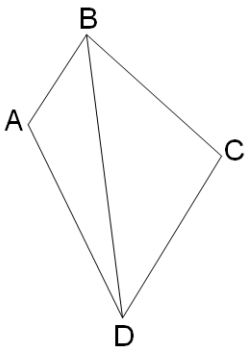
CORPORACION GIQ

UNIDAD 4

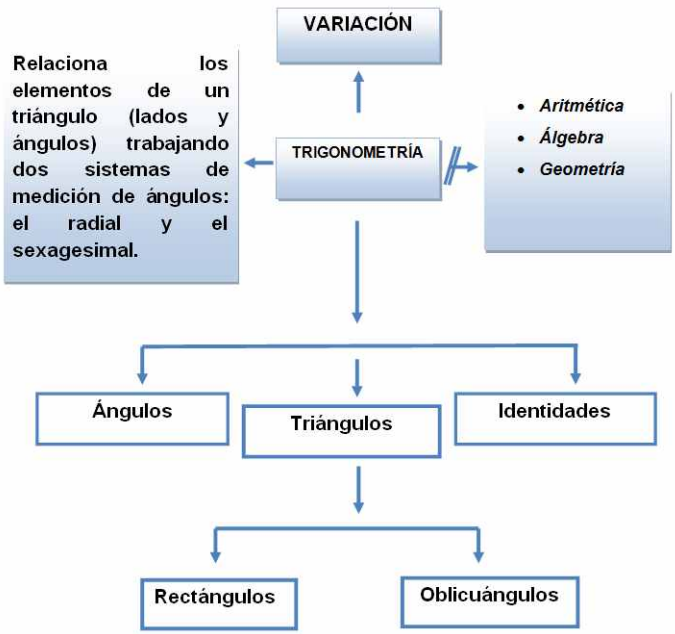
TRIGONOMETRÍA



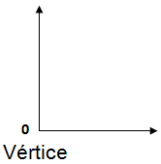
Se tiene los puntos A, B, C, D distribuidos como se indica en un plano, si se conocen $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y los ángulos ADB, BDC y ABC. Es posible ubicar la posición de los puntos A y C.

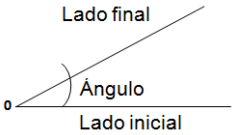


1. TRIGONOMETRÍA



La Trigonometría estudia los elementos del triángulo. Un ángulo se genera al girar una semirrecta sobre un punto fijo.





1.1 Sistema sexagesimal o ingles

Unidad: Un grado sexagesimal

$1 \text{ vuelta} = 360^0$

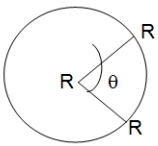
$1^0 \rightarrow 60'$

$1' \rightarrow 60''$

$\Rightarrow 1^0 \rightarrow 3600''$

1.2 Sistema radial, radian o circular

Un Radian: ángulo central cuya longitud de arco es igual a la longitud del radio que lo genera.

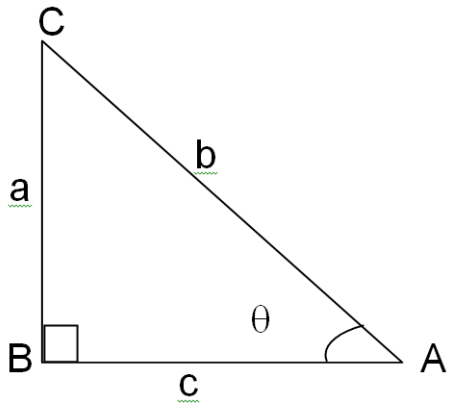


1 vuelta = 2π Radianes

Equivalencias:

1 vuelta	2πRadianes	360^0
Ángulo Llano	πRadianes	180^0
Ángulo Recto	$\pi/2$	90^0

2.- RAZONES TRIGONOMETRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO



$$\text{sen } \theta = \frac{Cat.Opuesto}{Hipotenusa} = \text{sen } A = \frac{a}{b}$$

$$\cos \theta = \frac{Cat.Adyacente}{Hipotenusa} = \cos A = \frac{c}{b}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{Cat.Opuesto}{Cat.Adyacente} = \text{tg } A = \frac{a}{c}$$

$$\sec\theta = \frac{Hipotenusa}{Cat.Adyacente} = \sec A = \frac{b}{c}$$

$$\csc\theta = \frac{Hipotenusa}{Cat.Opuesto} = \csc A = \frac{b}{a}$$

Signos de las razones trigonométricas según el cuadrante:

SIGNOS	I	II	III	IV
sen	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tg	+	-	+	-
ctg	+	-	+	-
sec	+	-	-	+
csc	+	+	-	-

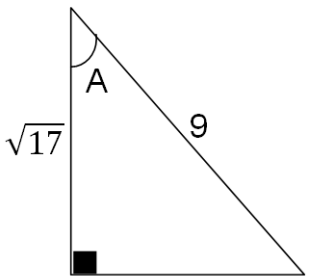
2.1 Razones Trigonométricas de ángulos notables

	Sen	cos	tg	ctg	sec	csc
30^0	$1/2$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
60^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
45^0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
37^0	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$
53^0	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$
0^0	0	1	0	-	1	-
90^0	1	0	-	0	-	1
180^0	0	-1	0	-	-1	-

Ejemplos:

Si el ángulo A es agudo y **seca =** $\frac{9}{\sqrt{17}}$ hallar sen A y tg A

Solución: De sec A = $\frac{9}{\sqrt{17}}$



Pitágoras

$X^2 = 9^2 - (\sqrt{17})^2$

$X^2 = 81 - 17 = 64$

$X = \sqrt{64} \rightarrow x = 8$

Luego tenemos

$\text{sen } A = \frac{8}{9}$

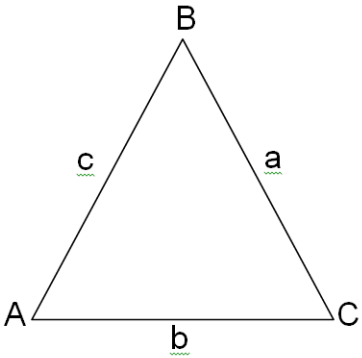
$\text{tg } A = \frac{8}{\sqrt{17}}$

Como A es un ángulo agudo, entonces está en el I cuadrante.

2.2 Resolución de triángulos

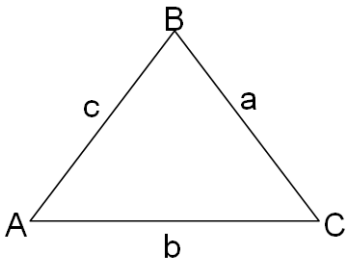
2.2.1 Teorema de Seno:

El lado de un triángulo es proporcional al seno del ángulo opuesto.



$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C}$$

2.2.2 Teorema de Cosenos



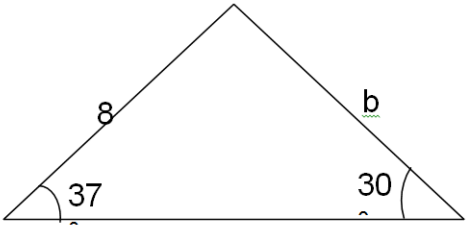
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc * \cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac * \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab * \cos C$

Ejemplos:

a) Hallar el lado b del triángulo mostrado.

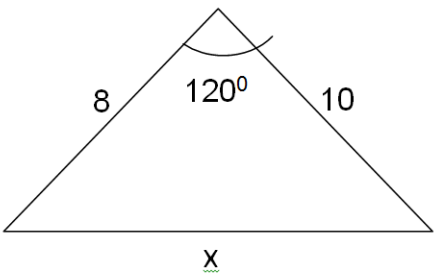


Se cumple $\frac{b}{sen37^0} = \frac{8}{sen30^0}$

$$b = 8 * \frac{sen37^0}{sen30^0} = 8 * \frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}} = 8 * \frac{6}{5}$$

$$b = \frac{48}{5} \Rightarrow b = 9.6$$

b) Hallar el lado "x" del triángulo mostrado



Se tiene

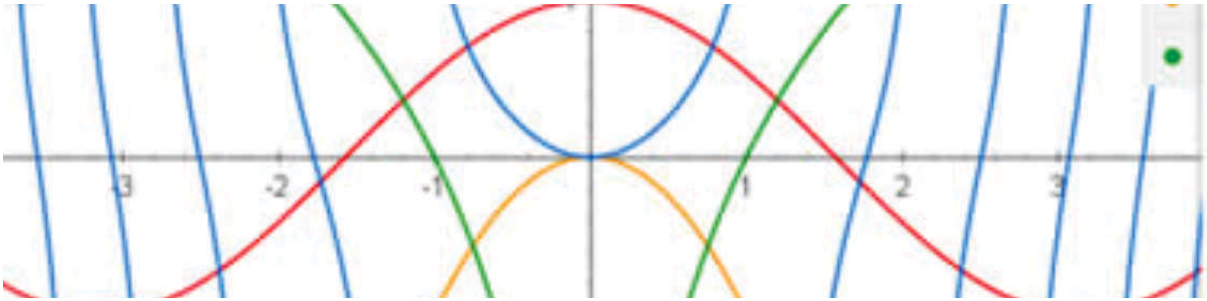
$x^2 = 8^2 + 10^2 - 2*8*10*\cos 120^0$

$x^2 = 64 + 100 - 160(-0.5)$

$x^2 = 164 + 80$

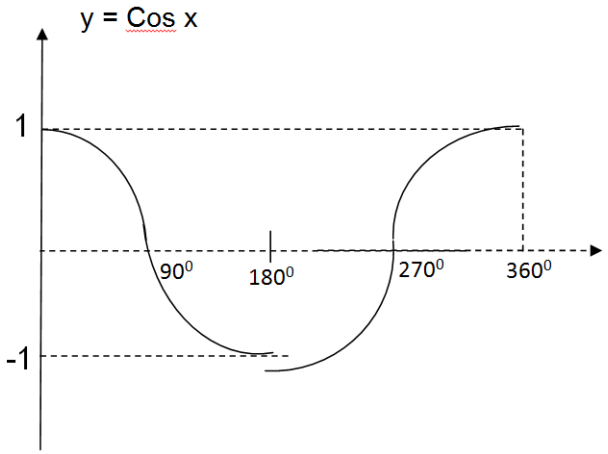
$x^2 = 244$

$x = \sqrt{244}$



2.2.3 Representación de las funciones trigonométricas.

a) Coseno

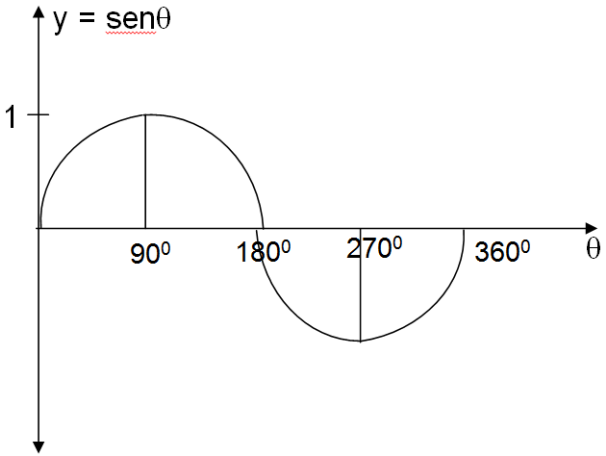


Observación: Las funciones seno y coseno tienen como rango el intervalo $[-1,1]$,

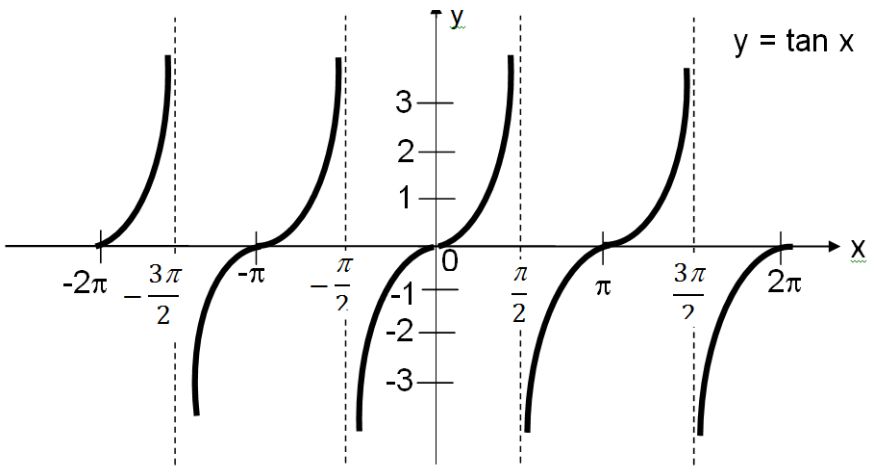
es decir, el máximo valor que pueden tomar estas funciones es 1 y el mínimo es -1, caso que no ocurre en las demás funciones.

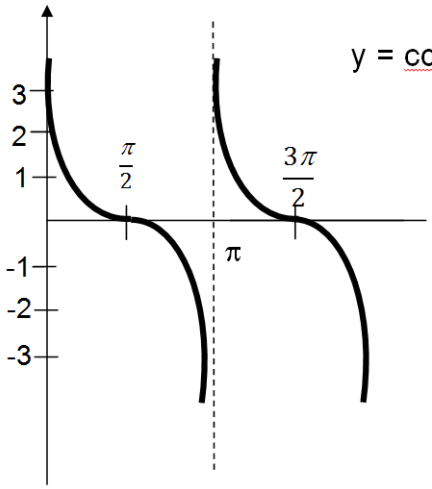
a) Tangente y cotangente

b) Secante y cosecante

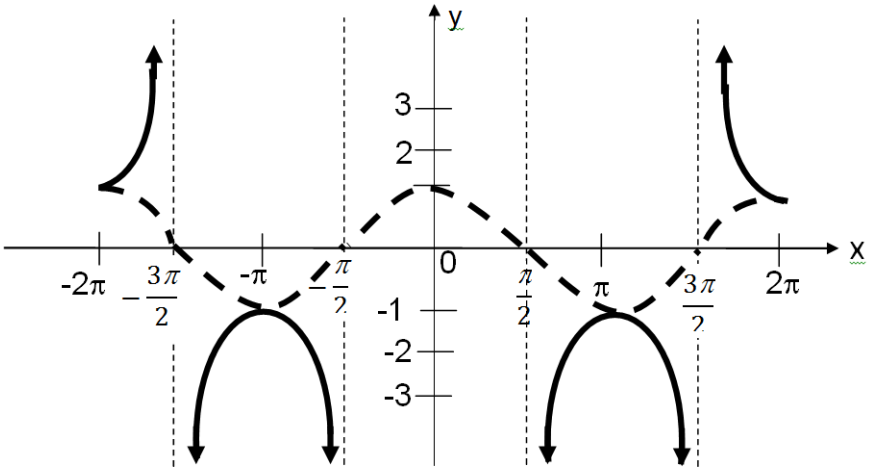


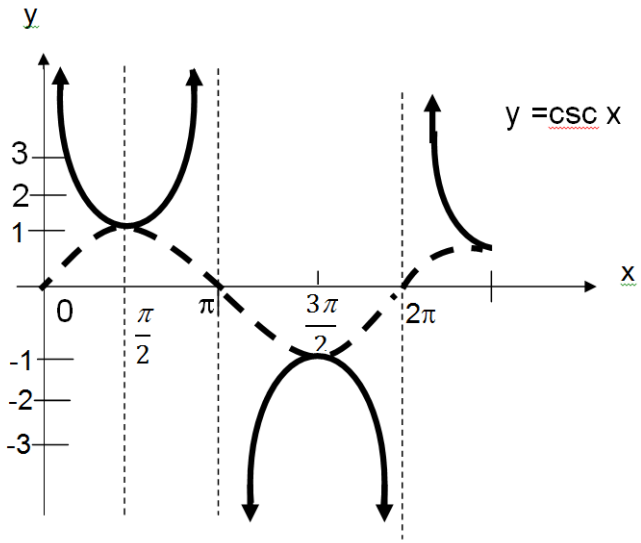
OBSERVACIÓN: Las funciones seno y coseno tienen como rango el intervalo $[-1,1]$, es decir, el máximo valor que pueden tomar estas funciones es 1 y el mínimo es -1, caso que no ocurre en las demás funciones.

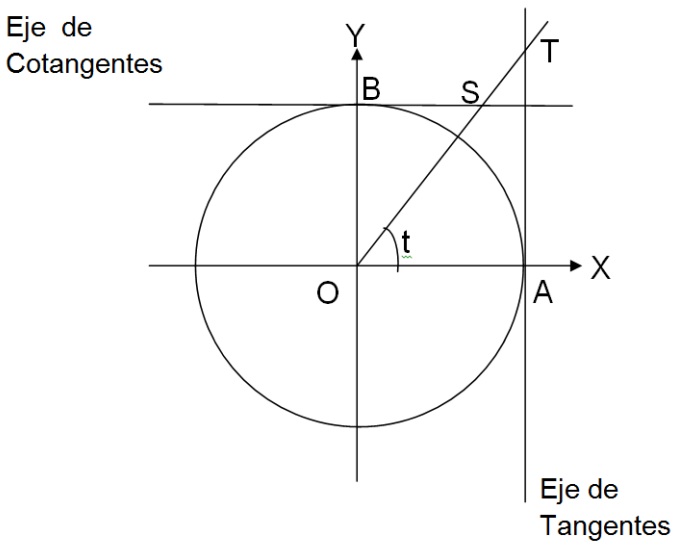


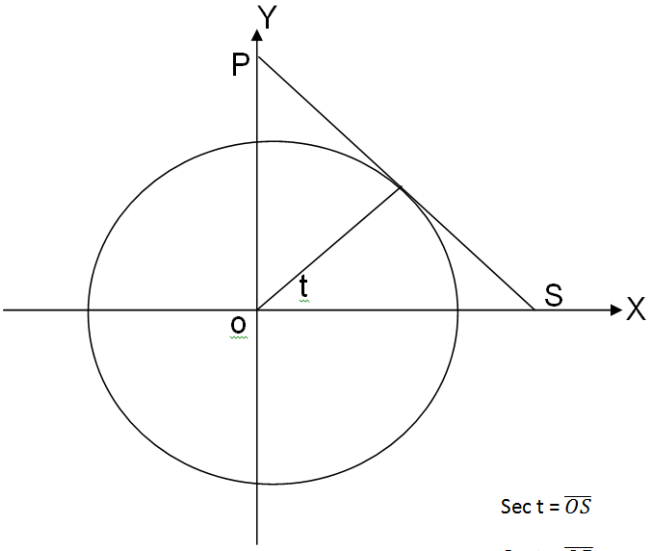

y = cotag x
3
2
1
-1
-2
-3
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$
π

y =sec x


y
x
3
2
0
-1
-2
-3
-2π
$-\frac{3\pi}{2}$
-π
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π


y
y =csc x
3
2
1
-1
-2
-3
0
π/2
π
3π/2
2π
x


Eje de
Cotangentes
Y
T
B
S
t
X
O
A
Eje de
Tangentes



Sec t = $\overline{OS}$

Csc t = $\overline{OP}$

3.3 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Se verifica para todo valor de la variable, las principales son:

1. $Sen^2 x + Cos^2 x = 1$

2. $Sec^2 x = 1 + tg^2 x$

3. $Csc^2 x = 1 + cot^2 x$

4. $Tg\ x = \dfrac{sen\ x}{cos\ x}$

5. $Ctg\ \ x = \dfrac{cos\ x}{senx}$

6. $Csc\ x = \dfrac{1}{senx}$

7. Sec x = $\frac{1}{cosx}$

8. Ctg x = $\frac{1}{tg\ x}$

Ejemplos:

Verificar las identidades:

a) $(Sen\ x + Cos\ x)^2$ = 1 + 2sen x cos x
= Sen^2 x + 2 Sen x Cos x + Cos^2 x
= $(sen^2x + cos^2x)$ + 2 Cos x Sen x
= 1 + 2 Sen x Cos x = 1 + 2sen x cos x

b) tg x + ctg x = sec x csc x

Pasamos "Tangente de x" y "cotangente de x" a "sen de x" y "coseno de x".

tg x + ctgx = sec x csc x

c) (sen x + cos x +1) (sen x + cos x-1)= 2 sen x cos x
(sen x + cos x +1)(sen x + cos x – 1) = 2 sen x cos x

Agrupamos factores en dos términos

"Sen x + Cos x" y 1; al multiplicar se forma la diferencia de cuadrados:

= $(sen\ x + cos\ x)^2$- 1^2 = 1 + 2 Sen x Cos x -1
(Sen x + Cos x + 1) (Sen x + Cos x –1)
= 2Sen x Cos x

3.1 Identidades para suma y resta de ángulos

Sen x $(x+y)$ = sen x cos y + cos x sen y
Cos $(x+y)$ = cos x cos y - sen x sen y

$$tg\,(x+y) = \frac{tgx+tgy}{1-tgxtgy}$$

sen $(x-y)$ = Sen x Cos y – Cos x Sen y
Cos $(x-y)$ = Cos x Cos y + Sen x Sen y

$$tg\,(x-y) = \frac{tgx-tgy}{1+tgx\cdot tgxtgy}$$

Ejemplos:

a) Hallar "sen 75^0"
De: 45^0 + 30^0 = 75^0
Sen 75^0 = sen (45^0+ 30^0)
Sen $45^0 \cos 30^0$ + cos 45^0 sen 30^0

$$\frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$Sen\ 75^0 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

b) Hallar " sen 16^0"

De: $53^0 - 37^0 = 16^0$

Sen 16^0= sen(53^0- 37^0)

Sen 53^0 cos 37^0- cos 53^0 sen 37^0

$$= \frac{4}{5} * \frac{4}{5} - \frac{3}{5} * \frac{3}{5} = \frac{16}{25} - \frac{9}{25}$$

Sen $16^0 = \frac{7}{25}$

c) Si tg a = $1/2$; tg b= $1/3$; hallar tg (a+ b)

En tg (a + b) = $\frac{tga+tgb}{1-tga \cdot tgb}$

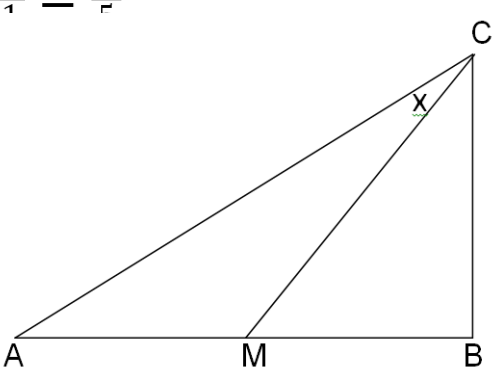
Reemplazamos los valores de las tangentes:

$$tg\ (a + b) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}*\frac{1}{3}} = \frac{\frac{3+2}{2*3}}{1-} = \frac{\frac{5}{6}}{}$$

tg (a + b) = 1

* En la figura; hallar tg x.

BC = 2 , AB = 6 ,AM = MB

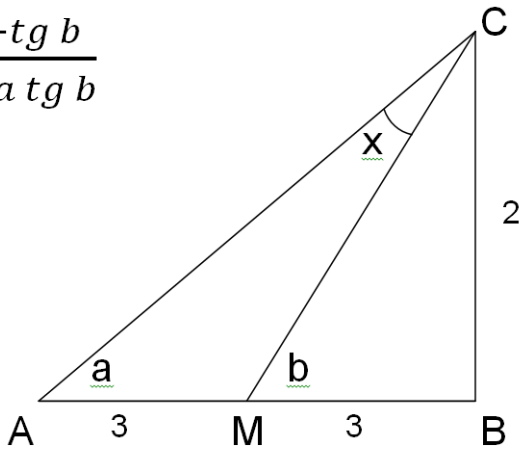


Solución:

x= a – b

tg x = tg(a – b)

$$tg = \frac{tg\ a - tg\ b}{1 + tg\ a\ tg\ b}$$



$$tg\ x = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3} * \frac{2}{3}} = \frac{\frac{6-3}{9}}{1 + \frac{2}{9}} = \frac{\frac{3}{9}}{\frac{11}{9}} = \frac{3}{11}$$

$tg\ a = {}^{2}/_{3}$ $tg\ b = {}^{1}/_{3}$

3.2 Identidades con ángulos dobles y medios

3.2.1 Identidades del Ángulo Medio

a) $Sen\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-Cosx}{2}}$

b) $\text{Cos}\,\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+Cosx}{2}}$

c) $\text{Tg}\,\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-Cosx}{1+\text{Cos}\,x}}$

d) $\text{Tg}\,\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{sen\ x} = \frac{Sen\ x}{1+\cos x}$

3.2.2 Identidades del Ángulo Doble "2x"

a) Sen 2x = 2 sen x Cos x

b) Cos 2x = Cos^2x – Sen^2

Cos 2x = 1-2Sen^2x

Cos 2x= 2 Cos^2x - 1

c) Tg 2x = $\frac{2\ tgx}{1-\ tg^2x}$

3.3 Transformación de sumas a productos.

a) sen x + sen y = 2 sen $\frac{x+y}{2}$ cos $\frac{x-y}{2}$

b) sen x – sen y = 2 sen $\frac{x-y}{2}$ cos $\frac{x+y}{2}$

c) cos x + cos y = 2 cos $\frac{x+y}{2}$ cos $\frac{x-y}{2}$

d) Cos x – cos y = - 2 sen $\frac{x+y}{2}$ sen $\frac{x-y}{2}$

Ejemplos:

a) Factorizar:

Sen 7x + Sen 3x

Sen 7x + Sen 3x

$= 2\text{sen}\frac{7x+3x}{2}\cos\frac{7x-3x}{2}$

= Sen 7x + Sen 3x = 2 Sen 5x Cos 2x

b) Factorizar : Cos 75^0 - Cos 33^0

$=-2\ \text{Sen}\frac{75^0+33^0}{2}\text{sen}\frac{75^0-33^0}{2}$

Cos 75^0- Cos 33^0 = - 2Sen 54^0Sen21^0

3.4 Funciones circulares inversas

Sen A = n A = ArcSen n= Sen^{-1}n

Cos A = m A = ArcCos m= Cos^{-1}m

Tg A = r A = ArcTg r= Tg^{-1} r

UNIDAD 4
TRIGONOMETRIA
EVALUACION

Los ángulos: A = 2700" ; B = 90° ;

$C = \frac{3\pi}{4}\ rad$

1. Se puede afirmar que:

A. Los ángulos A y B son complementarios.
B. Los ángulos A, B y C son complementarios.
C. Los ángulos A, B y C suman 180°.
D. Los ángulos A y C suman 180°.

2. Los ángulos A, B, C, también verifican:

A. A + B = C
B. A + B + C = $\frac{\pi}{2}$ Radianes
C. C – B = 90°
D. A = B = C

Sabiendo que las razones trigonométricas de un ángulo, indican la proporción de los lados de un triángulo rectángulo.

3. Se puede afirmar que:

A. Si Sen 30° = 0,5; la hipotenusa y los catetos son proporcionales a 1,1 y $\sqrt{2}$.
B. Si Tg 60° = $\sqrt{3}$; los catetos y la hipotenusa son proporcionales a 1, $\sqrt{3}$ y 2.
C. Si Sec 45° = $\sqrt{2}$; los catetos son proporcionales a 2 y la hipotenusa a $\sqrt{2}$.
D. Si Ctg 45° = 1; los catetos son iguales e iguales a 25.

4. Acerca de las razones trigonométricas se establece que:

A. Sen 30° = 0,8; en cualquier triángulo.
B. Cos 60° = 0,5; en cualquier triángulo.

C. Csec 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$; en cualquier triàngulo.

D. Tg 30° = $\frac{1}{2}$; en cualquier triàngulo.

En un triángulo rectángulo la secante de uno de sus ángulos es de 2,125 y el cateto opuesto al ángulo mide 30cm.

5. Si deseamos conocer el perímetro del triángulo es correcto plantear:

A. La proporción entre los lados del triángulo.
B. Que la proporción de los lados es 2; 3; 4.
C. Que el lado de 30cm es proporcional a 6.
D. La hipotenusa es proporcional a 15.

6. Considerando la respuesta anterior, cual es el valor del perímetro del triángulo:

A. 40 cm B. 60 cm C. 80 cm D. 100 cm

Tangente a los lados de un ángulo se inscribe una circunferencia de radio "α".

7. Para calcular la distancia del vértice del ángulo al centro de la circunferencia se debe trazar:

A. La distancia que es una bisectriz.
B. La distancia que es igual al radio.
C. La distancia que es igual al doble del radio.
D. La distancia que es 1.

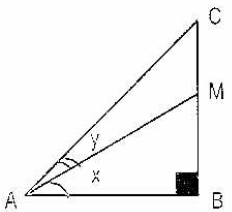
8. Si el ángulo mide 80º, el valor que representa la distancia del vértice al centro es:

A. α Csec 80° B. α Csec 40° C. α Sec 80° D. α Sec 40°

- En la figura:

  Ctg (x + y) = 1

  3 $\overline{MB}$ = 2 $\overline{MC}$



9. Si deseamos calcular las razones trigonométricas de “x” se debe:

A. Calcular los valores de los lados del triángulo.
B. Encontrar las proporciones de lados y segmentos del triángulo.
C. Calcular el valor de los ángulos.
D. Hallar el valor de “y”.

10. De la figura; hallar el valor de “Sec^2x +Ttg x”

A. $\frac{29}{25}$ B. $\frac{39}{25}$ C. $\frac{33}{25}$ D. $\frac{19}{25}$

Una identidad, es una igualdad que se verifica para todo valor de la variable o variables.

Una ecuación, es una igualdad que se verifica para algunos valores de la variable o variables.

11. Del siguiente grupo de relaciones indique cuales o cual es identidad.

$Sen^2x + Cos^2x = 1$ _____ (I)
$Sec^2x - Ttg^2x = 1$ _____ (II)
$Cosec^2x - 1 = Ctg^2x$ _____ (III)

A. I B. II C. III D. Todas

12. De las relaciones indicadas cuales son identidades:

$(senx + cosx + 1)(senx + cosx - 1) = 2\,senx\,cosx$ _____ (I)

$\frac{sen^3x + senx\,cos^2x}{cos^3x + cosx\,cen^2x} = tg^2x$ _____ (II)

$\frac{cosecx - senx}{\sec x - \cos x} = Ctg^3x$ _____ (III)

$(1 - senx - cosx)^2 = 2\,(1 - senx)(1 - cosx)$ _____ (IV)
sen

A. I, II B. I, III C. II, III, IV D. I, III, IV

13. De las relaciones dadas señale las que no son identidades:

$\frac{1-\cos x}{sen\,x} + \frac{sen\,x}{1-\cos x} = 2\,Cosec\,x$ _____ (I)

$\frac{1+senx}{\cos x} = \frac{cosx}{1-senx}$ _____ (II)

$Ctgx\,cosx + senx = secx$ _____ (III)

$(csecx - cenx)(secx - cosx) = sen\,x\,cosx$ _____ (IV)

A. I B. II C.III D. IV

14. De las relaciones, cuáles son identidades:

$\text{Tg}\,(x+y) = \frac{tgx+tgy}{1-tgx\,tgy}$ _____ (I)

Cos (x-y) = Cosx Cosy + Senx Seny _____ (II)

$\text{Tgx} + \text{tgy} = \frac{sen\,(x+y)}{\cos x\,\cos y}$ _____ (III)

A. Todas B. I C. II D. III

Dada la expresión : $\frac{1+sen2x+cos2x}{1+sen2x-cos2x}$

15. Para que sea una identidad, debe ser idéntica a otra expresión que depende de "X", para esto aplicamos criterios de:

A. Identidades de una variable.
B. Identidades de ángulos dobles con simples.
C. Identidades de ángulo mitad y doble.
D. Identidades de suma de ángulos.

16. De acuerdo con lo anterior, la expresión equivalente es:
A. Sen x B. Cos x C. Tg x D. Ctg x

17. La expresión: "Csc 4x + Ctg 4x"; para que se convierta en identidad debe ser equivalente a:

A. Tg x B. Tg 2x C. Ctg x D. Ctg 2x

18. Los catetos de un triángulo miden "cosx – senx" y "cosx + senx". Si el área del triángulo es 1/4, hallar la medida del ángulo "x"

A. 45º B. 30º C. 60º D. 15º

19. Para que la expresión : $\frac{Senx+\sqrt{3}Cosx}{Cosx-\sqrt{3}Senx}$ sea una identidad, debe ser igual a:

A. Tg (30º - x) B. Tg (60º + x) C. Ctg (30º + x) D. Ctg (60º + x)

Tres personas ubicadas en los puntos A, B y C. Si los puntos A y C están a un lado de un río y B al otro lado, la distancia entre A y C es de 300 m.

20. Para poder ubicar exactamente el punto B, si no se puede cruzar el río, debemos conocer:

A. La medida del ángulo B.
B. La medida del ángulo A.
C. La medida del ángulo C.
D. Las medidas de los ángulos A y C.

21. Si el ángulo A mide 60º y el ángulo C mide 30º , indicar la medida de A hasta B.

A. 150 mts B. $150\sqrt{3}mt$

C. $200\sqrt{3}mt$ D. $\frac{200\sqrt{3}}{3}mt$

22. Si el ángulo A mide 53º, y el ángulo C mide 82º, el valor aproximado de la distancia $\overline{BC}$ será de:

A. 300 mt B. 343 mt C. 285mt D. 317 mt

Todo triángulo se puede inscribir en una circunferencia de radio R.

23. Con respecto de la ley de senos, podemos afirmar, que siempre se cumple para un triángulo ABC:

A. $\frac{a}{senA} = R$

B. $\frac{b}{senB} = \frac{1}{R}$

C. $\frac{c}{seC} = \frac{1}{2R}$

D. $\frac{a}{senA} = 2R$

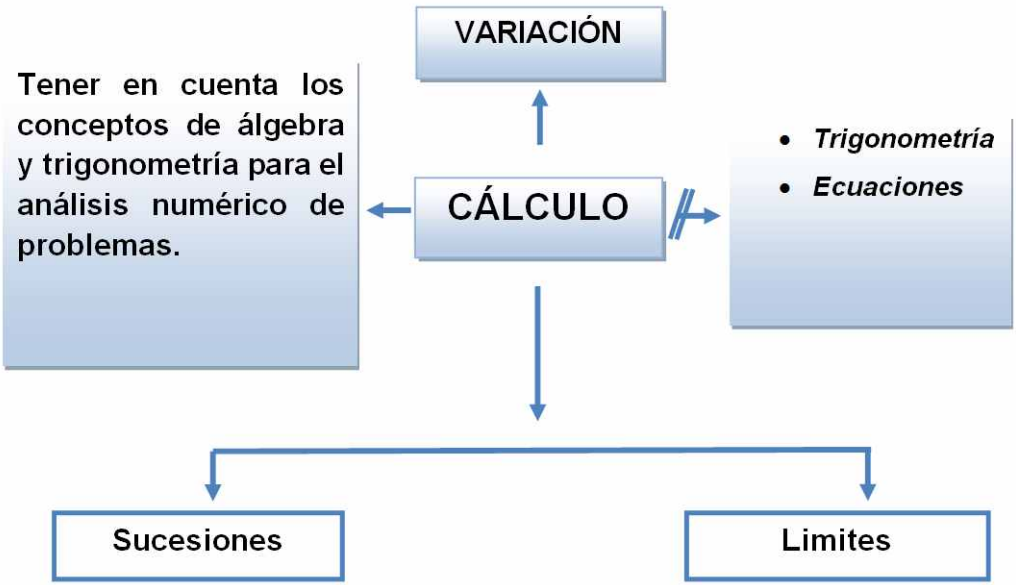
24. Si el lado del triángulo ABC, es igual a R, un valor de A será:

A. 30º B. 45º C.60º D. 90º

UNIDAD 5

SUCESIONES

Se caracteriza por....



1. SUCESIONES

Una sucesión es una función f de los naturales a los reales, es decir, $f: N \rightarrow R$

Generalmente una sucesión se denota $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \ldots$ Donde cada a_i, $1 \leq i < N$ es un término de la ecuación.

Dada una sucesión cualquiera, el estudiante debe estar en capacidad de hallar el término n-ésimo, es decir, aquel que esté en todos los términos de la sucesión.

Ejemplos:

a) ¿Cuál es el término n-ésimo de la sucesión 2, 4, 6, 8, 10, 12,....?

En este caso se nota claramente que los términos que conforman la sucesión son los pares, luego el término n-ésimo es 2n, pues para n=1 se obtiene 2, para n=2 se obtiene 4, para n=3 se obtiene 6, etc.

b) ¿Cuál es el término n-ésimo de la sucesión 5, 8, 11, 14, 17 ....?

En este caso se nota que los términos se obtienen sumando 3 al término anterior, luego una primera forma del término n-ésimo es 3n, pero para n=1 no se obtiene 5, que es el primer término de la sucesión y en este caso basta con sumar 2 al término n-ésimo y así se obtiene 3n+2 que es el que genera todos los términos de la sucesión.

c) Hallar el sexto término de la sucesión $\left\{\frac{2^n}{2n+4}\right\}$

En este caso basta solamente con remplazar n por 6, así:

$$\frac{2^6}{2(6)+4} = \frac{64}{12+4} = \frac{64}{16} = 4$$

Luego 4 es el sexto término de la sucesión.

2. LÍMITES

Si una función f está definida para valores de “x” cercanos al número fijo “a”, y si al aproximarse “x” al valor “a” los valores de f(x) se acerca más y más a un número específico “L”, decimos que “L” es el límite de Y = f(x) cuando “x” tiende a “a”, y se denota:

Lim f(x) = L

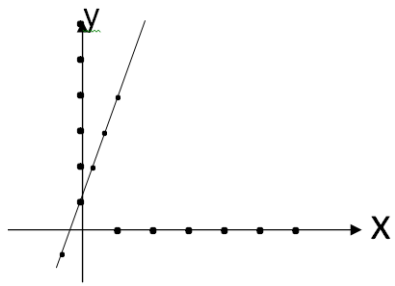
$X \rightarrow a$

Ejemplo:

f (x)= 3x + 1

Tabla de valores

x	1	2	3	0	-1	-2	-3
y	4	7	10	1	-2	-5	-8



Si trabajamos con x en el intervalo [1,3] se observa que y toma valores en el intervalo [4,10]. Si se observa cuando x se acerca a 2, consideremos valores mayores o menores próximos a 2:

Para

$x < 2 \Rightarrow$ x se acerca por la izquierda
$x > 2 \Rightarrow$ x se acerca por la derecha

A medida que x se acerca a 2, y se acerca a 7, por lo tanto el límite de f(x) cuando X tiende a dos es siete.

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2}(3x + 1) = 7$$

Cuando en una función se cumple:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) \text{ existe}$$

Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & Si\ x \leq 0 \\ x^2 & Si\ x > 0 \end{cases}$$

Verificando, se obtiene:

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x - 2 = -2$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x)^1 \lim_{x \to 0^-} f(x)$

$\therefore \lim_{x \to 0} f(x)$ no existe

2.1 Propiedades de los límites

2.1.1 Unicidad del límite:

Si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, entonces es único:

$x \to a$

2.1.2 Límite de una función polinómica

Lim $(a^n x^n + a^{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0) = a^n b^n + a^{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_0$

$x \to b$

$x \to 2$

Ejemplo:

$\lim_{x \to 2}(2x^3 - 3x^2 + 4x + 1) = 2(2)^3 - 3(2)^2 + 4(2) + 1$

$\lim_{x \to 2}(16 - 12 + 8 + 1) \Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = 13$

2.1.3 Límite de una constante:

Si C es una constante, y f (C) = C

$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} C = C$

El límite de una constante es ella misma

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 2} 3 = 3$$

2.1.4 Límite de una suma de funciones

Si f y g son funciones tales que:

$\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$

$\Rightarrow \lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2$

Ejemplo:

$f(x) = 3x^2 - 4x + 1$; $g(x) = 8x - 2$

$\lim_{x \to -2}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to -2}(3x^2 - 4x + 1) + \lim_{x \to -2}(8x - 2)$

= 21 – 18
= 3

2.1.5 Límite de un producto de funciones:

Si f y g son funciones tales que:

$\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$

$\Rightarrow \lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) * \lim_{x \to a} g(x) = L_1 * L_2$

Ejemplo:

f(x) = x^3 +4; g(x) = 3x – 2

$\lim_{x \to 3}[f(x)g(x)] = \lim_{x \to 3}(x^3 + 4) \lim_{x \to 3}(3x - 2)$

= 31• 7
= 217

2.1.6 Límite de un cociente de funciones

Si f y g son funciones tales que:

$\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = L_2 \neq 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

Ejemplo:

f(x) = $2x^2$ - 1 , y g(x) = $3x^3$ + 5

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 1}{3x^3 + 5} = \frac{\lim_{x \to 2}(2x^2 - 1)}{\lim_{x \to 2}(3x^3 + 5)} = \frac{7}{29}$$

2.1.7 Límite de una Raíz

Si n $\in Z^+$, L > 0 cuando n es par

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

Ejemplo:

f(x) = $5x^2$ - 2x + 1

$$\lim_{x\to -1} \sqrt{5x^2 - 2x + 1} = \sqrt{\lim_{x\to -1}(5x^2 - 2x + 1)} =$$

$$\sqrt{5 + 2 + 1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

2.1.8 Límite del logaritmo de una función

Si f(x) > 0, y lim f(x) = L $\Rightarrow \lim_{x\to a}[Log f(x)]$= Log$[\lim_{x\to a} f(x)]$= Log L

Ejemplo

f(x) = x^2 + 4

$$\lim_{x\to 1}[Log(x^2 + 4)] = \text{Log}[\lim_{x\to 1}(x^2 + 4)] = Log(1 + 4) = Log5$$

2.1.9 Límite de las funciones trigonométricas

a) $\lim_{x \to a} sen\ x$ = sen a

b) $\lim_{x \to a} \cos x$ = cos a

c) $\lim_{x \to a} tg\ n\ x$ = tg a, Siempre que a $\neq \frac{n\pi}{2}$ y n sea impar

d) $\lim_{x \to a} ctg\ x$ = ctg a, Siempre que a $\neq n\pi$ y n $\in$ Z.

e) $\lim_{x \to a} cec\ x$ = sec a , Siempre que a $\neq \frac{n\pi}{2}$ y n sea impar.

f) $\lim_{x \to a} \csc x$ = csc a, Siempre que a $\neq n\pi$ y n $\in$ Z.

2.2 Indeterminadas matemáticas

2.2.1 Indeterminaciones del tipo $^0/_0$:

Hay que eliminar la indeterminación por medio de los siguientes pasos:

1. Factorizar o racionalizar la expresión dada.
2. Simplificar el resultado obtenido.
3. Aplicar las propiedades de los límites.

Ejemplos:

a) $\lim_{x\to -3} \frac{x^3+27}{x+3} = \frac{\lim_{x\to -3} x^3+27}{\lim_{x\to -3} x+3} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^3+27}{x+3} = \frac{\lim_{x\to -3}(x+3)(x^2-3x+9)}{\lim_{x\to -3} x+3} = \lim_{x\to -3}(x^2-3x+9)$$

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^3+27}{x+3} = 9+9+9 = 27$$

b) $\lim_{x\to -0} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{3})(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}{x(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})} = \lim_{x\to -0} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$

$$=\lim_{x\to 0} \frac{x+3-3}{x(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

2.2.2 Límites al infinito

Resuelve indeterminaciones $\frac{\infty}{\infty}$.

Hay que tener en cuenta que: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^n} = 0$, $n \in Z^+$

Se puede eliminar esas indeterminaciones de las siguientes maneras:

1) Multiplicar todos los términos de la función dada por $1/X^n$, donde n, es el mayor exponente que aparece en la expresión dada.
2) Simplificar la expresión resultante.
3) Aplicar propiedad de los límites.

Ejemplos:

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3}{1+0} = 3$

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2-8}}{x^2+2} = \frac{\lim_{x\to\infty}\sqrt{3x^2-8}}{\lim_{x\to\infty}(x^2+6)} =$

$= \frac{\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2-8}}{x^2}}{\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+6}{x^2}\right]} = \frac{\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{3x^2}{x^4}-\frac{8}{x^4}}}{\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{x^2}+\frac{6}{x^2}\right]}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2-8}}{x^2+6} = \frac{\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{3}{x^2}-\frac{8}{x^4}}}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x^2}\right)} = \frac{\sqrt{0+0}}{1+0} = 0$

2.2.3 Límites infinitos

Cuando a una función se le aplican las propiedades de los límites y se obtienen resultados de la forma ± (n/0), entonces el límite no existe y se utilizan los símbolos +∞, -∞ o ∞ . Este tipo de Límites juegan un papel importante cuando se va a graficar una función, ya que aquellos valores X para los cuales el límite es infinito, determinan rectas llamadas asíntotas.

Ejemplo:

f(x) = $\frac{2x}{x+3}$,(la función se indetermina en x= -3)

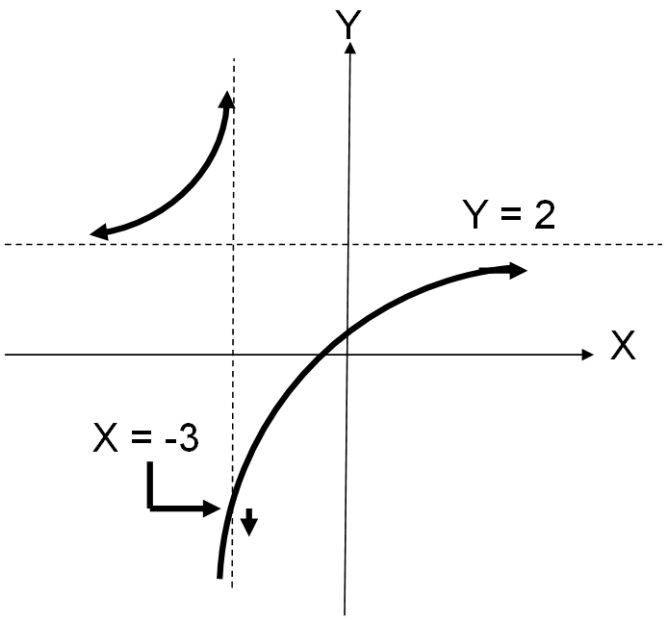
$\lim_{x\to -3}\left[\frac{2x}{x+3}\right] \Rightarrow \lim_{x\to -3^+}\frac{2x}{x+3} = -\infty$;

$\lim_{x\to -3}\left[\frac{2x}{x+3}\right] \Rightarrow \lim_{x\to -3^+}\frac{2x}{x+3} = -\infty$;

$\lim_{x\to -3^-}\frac{2x}{x+3} = \infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to -3}\frac{2x}{x+3}$ no existe

Ahora $\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}} = 2$



UNIDAD 5

CÁLCULO

EVALUACIÓN

1. Joaquín ve en el aparador de una tienda de antigüedades un reloj de arena, el cual es un cilindro recto de seis centímetros de altura y dentro de dos conos idénticos; el cono superior está lleno de arena. El volumen de un cono es la sexta parte del volumen del cilindro. El reloj se debe voltear cada 12 horas. Joaquín observa el reloj y ve que ha caído tres cuartos del volumen de arena la cono inferior, entonces:

A. Son las siete de la noche si se le ha dado ya la vuelta al reloj.
B. El volumen de arena que hace falta por caer es 1/24 del volumen del cilindro y son las 9 p.m.
C. Falta por caer 1/6 del volumen de arena, entendiendo que son las 2 p.m.
D. Falta sólo unos pocos minutos para que termine el día.

2. En una circunferencia se inscribe un hexágono (polígono de 6 lados), con respecto a esta situación se puede establecer que:

A. El radio de la circunferencia tiene la misma medida del lado del hexágono.
B. El radio de la circunferencia mide el doble del lado del hexágono.
C. La medida del lado del hexágono, mide el doble del radio de la circunferencia.
D. El radio de la circunferencia equivale a 2/3 la medida del lado del hexágono.

5. En un almacén el bodeguero desea empacar 900 cajitas de chicle de 2 cm x 3 cm x 2 cm en una caja grande de dimensiones 60 cm x 48 cm x 36 cm; se puede afirmar que:

A. Luego de llenar la caja sobran 360 cajitas.
B. La caja se llena exactamente.
C. Luego de colocar en la caja faltan 360 cajitas.
D. Luego de colocar en la caja faltan 240 cajitas.

6. Mario dibujó dos ángulos y observa que la medida de uno de ellos es complementario con la del otro, luego analizando sus valores descubre que mientras que uno de ellos mide un grado el otro mide el doble. De lo anterior podemos decir que:

A. Los dos ángulos forman una proporción.
B. Las medidas de los ángulos están en proporción de 1 a 2.
C. El ángulo menor con respecto al mayor está en proporción de 2 a 1.
D. Los ángulos son suplementarios.

7. De acuerdo con la situación anterior, la expresión que define la relación entre los ángulos es:

A. $\frac{x}{y} = \frac{1}{90}$

B. $\frac{x+y}{y} = \frac{3}{2}$

C. $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$

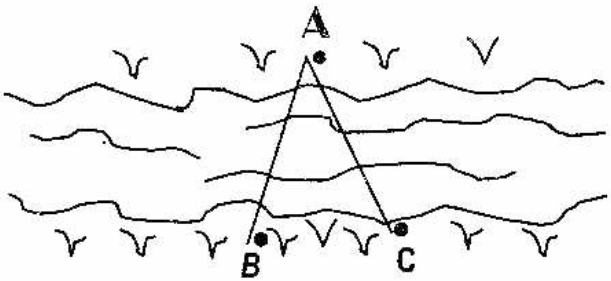
D. $\frac{x}{x+y} = \frac{3}{2}$

8. El capataz de una finca agrícola le ordena a tres de sus peones que construyan una cerca circular en el frente o entrada de la finca, esta parte es rectangular, y el cerco debe ir de extremo a extremo, la parte que queda fuera del cerco y de la finca debe pavimentarse y pintarse de verde. Se necesita entonces saber cuál es la superficie, determinando que es equivalente a:

3. Si el área de un cuadrado es de $100cm^2$, se aumenta el valor de los lados y el valor del área del cuadrado se incrementa en 300 cm^2 formando un nuevo cuadrado, entonces podemos afirmar que:

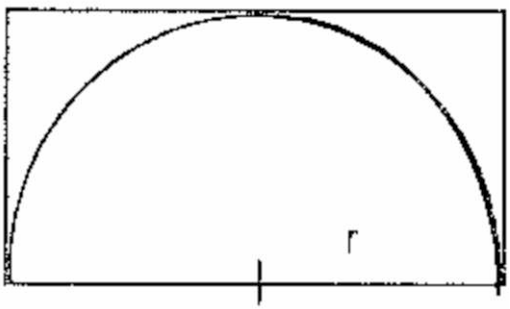
A. El área del nuevo cuadrado es el 40% del cuadrado original.
B. El área del nuevo cuadrado es el 400% del cuadrado original.
C. El área del nuevo cuadrado es el 300% del cuadrado original.
D. El área del nuevo cuadrado es el 100% del cuadrado original.

4. Los areneros del río Cauca para evitar ser arrastrados por la corriente del río, colocan dos cables o cuerdas, las cuales atraviesan el río de lado a lado uniendo dos puntos diferentes en un mismo lado con un solo punto del otro lado.



El ángulo que forman las dos cuerdas en el punto A se halla:

A. Conociendo el valor de otro ángulo.
B. Si se conoce la distancia entre los puntos B y C y otro de los ángulos.
C. Conociendo el valor de otro de los ángulos, la longitud de una de las cuerdas y la distancia entre B y C.
D. Si se conoce el valor de dos distancias, como la de las cuerdas o una cuerda y la distancia $\overline{BC}$.



A. $r^2\ (1 - \pi/2)$

B. $r^2 - \frac{\pi\ r^2}{2}$

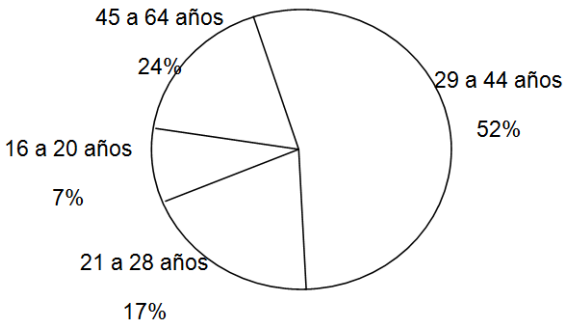
C. $2\ r^2 - \frac{\pi\ r^2}{2}$

D. $\frac{\pi}{2}\ r^2 - 2\ r^2$

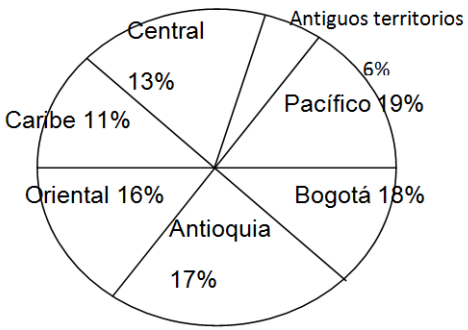
UNIDAD 6

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

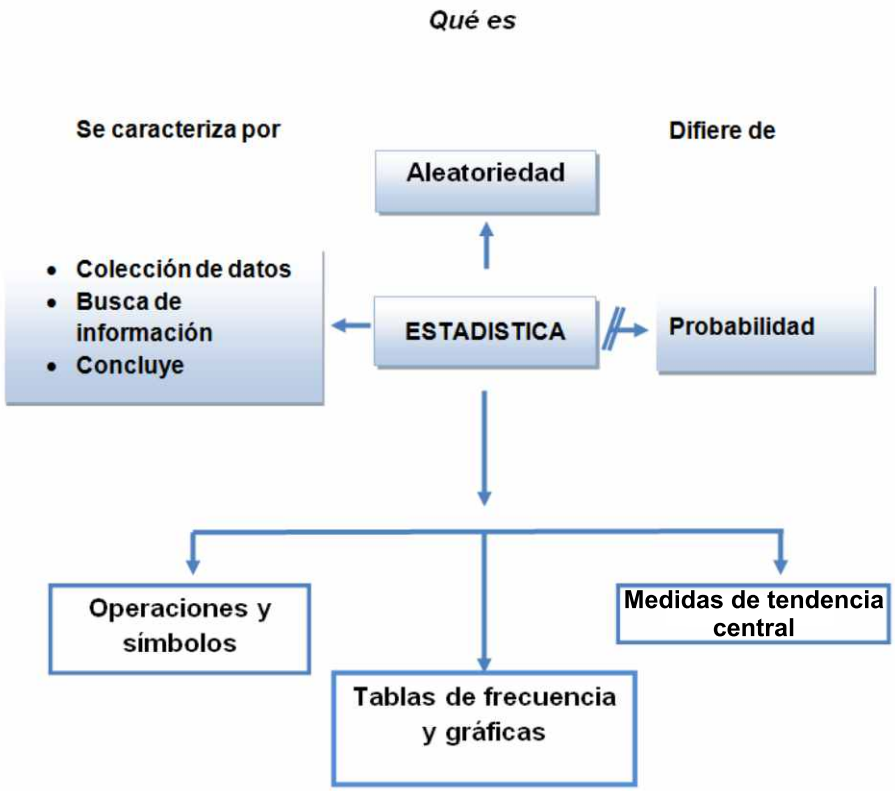
En una encuesta realizada en el país sobre las personas que les gusta el aguardiente se obtuvo la siguiente información: Más de 462.000 personas, que representa el 1.4% de la población entre los 16 y 65 años, se convirtieron en nuevos bebedores de aguardiente. 5.683.502 consumieron aguardiente en el último mes y 6.570.250 lo consumieron durante el último año.



Consumo de aguardiente por edad



Consumo de Aguardiente por región



1. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

La Estadística es una ciencia que trata de la recolección, ordenación y análisis de datos (estadística descriptiva) que permite la obtención de conclusiones válidas para predecir fenómenos y para la toma de decisiones (estadística inferencial).

1.1 Nociones de Población y Muestra

Población o Universo es el conjunto completo de aquellos individuos (personas u objetos) que poseen características observables y medibles.

Muestra es un subconjunto de dicha población. Por ejemplo, el conjunto de todos los habitantes del área metropolitana es la población y el conjunto de todos los habitantes de la comuna de Santiago, es la muestra.

Para que una muestra sea representativa, debe ser elegida al azar y del tamaño apropiado de acuerdo con la población, para que las conclusiones que se extraigan del estudio puedan ser aplicables a toda la población.

1.2 Distribución de Frecuencias

Veamos este concepto a través de ejemplos. Supongamos que las edades de los alumnos de un curso universitario son las siguientes: 18 – 18 – 20 – 21 – 20 – 19 – 19 – 21 – 18 – 18 – 20 – 19 – 17 – 21 – 20 –18 – 19 – 20 – 20 – 18.

Ordenemos estos datos en forma creciente: 17 – 18 – 18 – 18 – 18 – 18 – 18 – 19 – 19 – 19 – 19 – 20 – 20 – 20 – 20 – 20 – 20 – 21 – 21 – 21.

Como hay edades que se repiten, podemos resumir esta información en una tabla de frecuencia, donde al lado del valor de la variable, anotamos su respectiva **frecuencia fi,** o números de veces que se repite:

x_i	f_i
17	1
18	6
19	4
20	6
21	3
n =20	

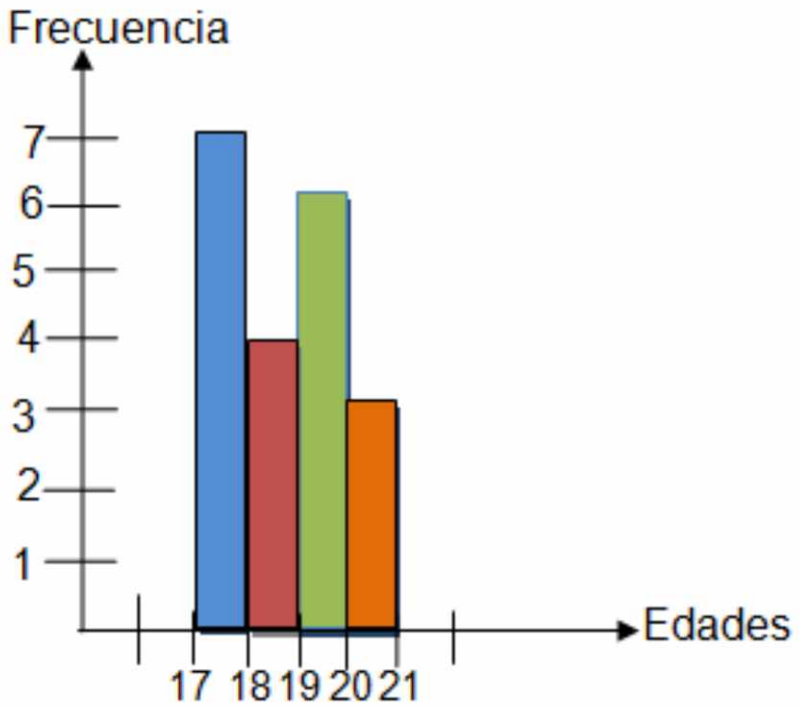
1.3 Histograma y Polígono de Frecuencias

De los diversos diagramas que existen para representar la información gráficamente podemos citar los histogramas y los polígonos de frecuencias.

1.3.1 Histograma

En este diagrama se representa cada intervalo por un rectángulo cuya base es la amplitud del intervalo y su altura es la frecuencia del intervalo. El histograma del ejemplo anterior es:

Edades	Frecuencia
17.0 – 18.0	7
18.1 – 19.0	4
19.1 – 20.0	6
20.1 - 21.0	3
n = 20	

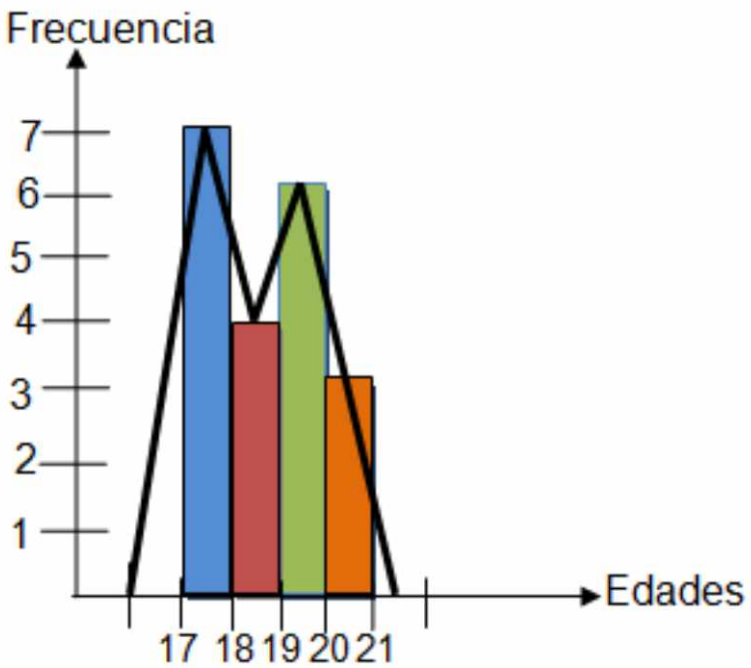


1.3.2 Polígono de Frecuencias

Éste se obtiene uniendo todos los puntos medios de los bordes superiores de los rectángulos de un histograma, por medio de segmentos.

La poligonal formada se cierra agregando a ambos lados del histograma un intervalo cuyos puntos medios se unen a los puntos medios de los rectángulos y adyacentes a él.

El polígono de frecuencias del mismo ejemplo anterior será:



1.4 Estadígrafos de posición o medidas de tendencia central

La distribución de frecuencias y representación es insuficiente para establecer un buen estudio de la variable. Se necesitan, además, de ciertos indicadores que den cuenta del comportamiento global de los datos.

Tales indicadores, que caracterizan los valores en torno a los cuales tienden a agruparse los datos se llaman **estadígrafos de posición o medidas de tendencia central.** Los principales son: Media aritmética (M.A o $\bar{x}$), Mediana (Me) y Moda (Mo). Para ilustrarlos, consideremos la nota de un alumno en un cierto ramo y en un trimestre:

4 – 5 – 6 – 7 – 7.

1.4.1 Media aritmética ($\bar{X}$)

$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ es

Es decir, la media aritmética es lo que conocemos como "promedio".

Sin embargo, cabe destacar el hecho de que existen muchos otros promedios tales como la media geométrica, la media armónica, la media cuadrática, etc., cada uno de los cuales tiene diversos y específicos usos.

Para las notas del estudiante, tendremos que la media aritmética es: $\bar{X} = \frac{4+5+6+7+7}{5} = \frac{29}{5} = 5.8$

Si los datos se encuentran agrupados en una tabla de frecuencias, entonces la media aritmética se obtiene así:

$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} fixi}{N}$ en donde N = $\sum_{i=1}^{n} f_i$ (es la suma de las frecuencias).

1.4.2 Mediana (Me)

La mediana de un conjunto de datos ordenados:

$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ es:

a) El número que ocupa el lugar central si hay un número impar de datos, o bien:

b) La media aritmética de los términos centrales si hay un número par de datos.

Para las notas del alumno (número impar), tendremos Me = 6.

La mediana tiene como ventaja con respecto de la media aritmética, que es menos afectada por valores extremos de la variable.

1.4.3 Moda (Mo)

La moda de un conjunto de datos es el valor que más se repite, o sea, aquel que tiene mayor frecuencia.

Para las notas del alumno, la moda es 7. Veamos otros ejemplos:

a) En los siguientes datos: 1 – 2– 2 – 5 – 5 – 3 – 2 – 1, la moda es 2 (su frecuencia es 3).

b) En: 1 – 3 – 5 – 7 – 5 – 3, hay dos modas: 3 y 5. Se denomina distribución **bimodal.**

En: 1 – 5 – 7 – 9 – 5 – 7 – 9 – 1, no hay moda y, por lo tanto, se denomina distribución **amodal**.

Técnicas de Conteo

Son métodos para determinar el número de elementos de un conjunto, sin enumeración directa. En el caso especifico de estadística y probabilidad se refiere a las técnicas para encontrar el número de resultados posibles de un experimento particular. Tales técnicas son conocidas algunas veces con el nombre de análisis combinatorio.

Entre estos arreglos podemos hablar de Combinaciones y permutaciones y variaciones:

Combinación Una combinación es un arreglo de cierto número de objetos tomados de un conjunto de n objetos en tal forma que el orden en que se disponen no importa

Si llamamos n al número de elementos del conjunto y k al número que integrará cada uno de los conjuntos que debemos formar, de modo que los elementos de cada uno sean diferentes y no importa el orden, se tiene la formula

$$C_{(n,k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ejemplo Entre 9 personas, ¿de cuántos modos puede formarse una junta de 5 personas?

Datos ***n***= 9 y ***k*** = 5

$C_{(9,5)} = \frac{9!}{5!(9-5)!}$ Desarrollando esta expresión obtenemos $C_{(9,5)} = \frac{9x8x7x6x5!}{5!4!} = C_{(9,5)} = \frac{9x8x7x6x}{4x3x2x1} = 126$

Permutación, Una permutación es un arreglo de cierto número de objetos tomados de un conjunto de ***n*** objetos en tal forma que el orden en que se disponen si importa

Si llamamos ***n*** al número de elementos del conjunto y ***k*** al número que integrará cada uno de los conjuntos que debemos formar, de modo que los elementos de cada uno sean diferentes y si importa el orden, se tiene la formula

$$P_{(n,k)} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ejemplo: Cuantos números diferentes de 4 cifras sin repetir se pueden formar.

Datos ***n***= 10 y ***k*** = 4

$P_{(10,4)} = \frac{10!}{(10-4)!}$ Desarrollando esta expresión obtenemos $P_{(10,4)} = \frac{10x9x8x7x6!}{6!} = P_{(10,4)} = 10x9x8x7 = 5040$

Variación una variación es cada una de las ordenaciones que pueden formarse con varios elementos, de modo que dos ordenaciones del mismo número de elementos se diferencie por lo menos, en un elemento o por el orden como están colocados, esto se conoce también como una permutación ,con repetición de elementos y se calcula como (n)x (n) x (n).., el numero de veces que se quiera la agrupación.

Ejemplo: Cuantos números diferentes de 4 cifras se pueden formar.

Datos ***n***= 10

V= 10x10x10x10 = 104 = 10 000

2. PROBABILIDAD

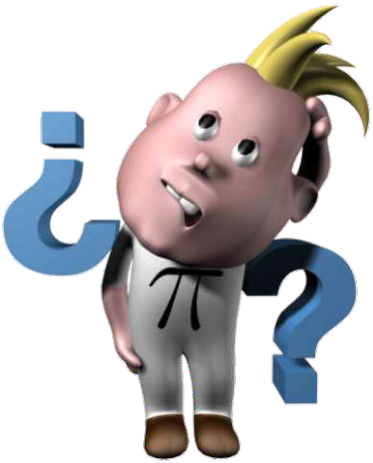
La rama de la matemática conocida actualmente como Probabilidad, consiste en el estudio de ciertos experimentos llamados aleatorios, es decir, libres de determinación previa. La probabilidad surgió a comienzos del siglo XVII, en relación con los diversos juegos de azar que se practicaban en la época. Algunos de ellos, los cuales siguen vigentes hoy en día, son los juegos de dados, de cartas, la lotería, la ruleta, etc. A pesar de tener más de tres siglos, debemos indicar que la moderna teoría axiomática de la probabilidad es patrimonio del siglo XX, en especial durante la cuarta década.

Experimentos Aleatorios Previos

Llamaremos experimento a cualquier actividad que pueda repetirse las veces que desee en igualdad de condiciones por algún experimentador y que, después de realizado, entrega un resultado.

Si nosotros podemos especificar la totalidad de resultados posibles que no tengamos la certeza de cuál de ellos va a salir "a priori", estamos ante la presencia de un **experimento aleatorio.**

Experimento Aleatorio



Un experimento aleatorio es aquel en el que se conocen todos los resultados posibles pero sin tener la certeza de cuál será un resultado particular.

Ejemplos:

a) Lanzamiento de una moneda.

b) Lanzamiento de un dado.

c) Extracción de una carta de un mazo de naipes.

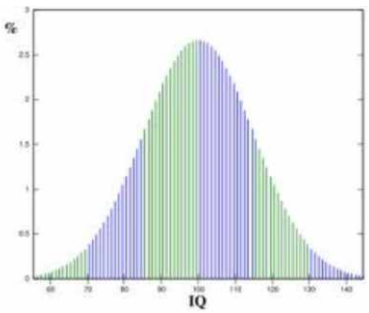
¿Puede usted citar otros? ¡Hay muchos!

Especifiquemos el conjunto S, de todos los resultados posibles del experimento aleatorio, lanzar una moneda al aire y observar lo que sale.

Sea c: cara y s: sello, entonces

S = {c, s}. A este conjunto le llamaremos espacio muestral.

Espacio Muestral



Se llama espacio muestral S, asociado a un experimento aleatorio E, al conjunto de todos los resultados posibles de dicho experimento. Los espacios muestrales pueden ser finitos o infinitos.

Nosotros consideraremos en nuestro estudio solamente espacios muestrales finitos.

Ejemplos:

Al lanzar un dado, el espacio muestral es:

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

¿Cuál es el espacio muestral del experimento: lanzamiento de dos monedas a la vez, claramente identificables?
Ídem para lanzamiento de dos dados.

Consideremos ahora en el experimento de lanzar un dado la situación de obtener un número par. Es decir A = {2, 4, 6}. A esta situación o conjunto se le llama un evento o suceso.

Evento O Suceso

Se llama evento o suceso a todo subconjunto A, de un espacio muestral S.

Así, si S, es un espacio muestral y A, un suceso o evento, entonces $A \subset S$.

Ejemplo:

En el espacio muestral S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, los siguientes son eventos:

a) Sacar un número primo.

b) Sacar un número primo y par.

c) Sacar un múltiplo de cinco.

¡Descríbalos por extensión¡

Puesto que φ y S son subconjuntos de S, entonces, de acuerdo con la definición, también son sucesos. El suceso φ, se llama suceso imposible y el suceso S, se llama suceso cierto o seguro. Sucesos tales como {3}, {5} y {6}, que consta de un solo elemento se llaman **sucesos elementales.**

Cuando lanzamos un dado al aire, es decir, el experimento aleatorio con espacio muestral S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, podemos obtener, por ejemplo, 3 ó 4 pero no ambos. En tal caso se habla de eventos **mutuamente excluyentes.**

Eventos Mutuamente Excluyentes

Dos eventos A y B son mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir en forma simultánea, es decir, si y sólo si $A \cap B = \varphi$.

Ejemplo:

En el lanzamiento de una moneda los eventos A: que salga cara y B: que salga sello, son mutuamente excluyentes.

$A = \{c\}$, $B = \{s\}$ y $A \cap B = \varphi$

Probabilidad de un suceso con un número finito de casos igualmente probables

Cuando lanzamos una moneda al aire y observamos lo que sale nos encontramos con un espacio muestral S = {c, s}. Si la moneda no está cargada, no existe razón alguna para pensar que una de las caras tenga preferencia a salir con respecto a la otra. Así, admitimos que para una moneda ideal, ambas caras tienen la misma "probabilidad" de salir: dicha probabilidad es $\frac{1}{2}$ (uno de dos).

Análogamente, cuando lanzamos un dado ideal y observamos lo que sale nos encontramos con un espacio muestral S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Cada uno de los eventos es igualmente probable siendo mutuamente excluyentes entre ellos. Aquí la probabilidad de cada uno $\frac{1}{6}$ es (uno de seis).

En general, si el espacio muestral

S asociado a un experimento aleatorio E es $S = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$, en que cada uno de los eventos $\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \ldots, \{a_n\}$ son igualmente probables (equiprobables), entonces la probabilidad de cualquiera de ellos es $\frac{1}{n}$. Este es el enfoque clásico o "a priori".

Probabilidad Clásica O "A Priori"

Sea E, un experimento aleatorio con un espacio muestral S. Supongamos que cada resultado es "equiprobable", o sea, no hay razón alguna para suponer su ocurrencia sobre la de los demás. En tal caso, la probabilidad de un evento A, P(A), es la razón entre el número de casos favorables al número total de casos posibles.

$$P(A) = \frac{números\ de\ casos\ favorables\ para\ el\ evento\ A}{Número\ total\ de\ casos\ posibles}$$

Esta es la definición clásica de Laplace (Piere Simón Laplace : Matemático, Físico y Astrónomo francés del siglo XVIII). Si llamamos n_a al número de casos favorables para el evento A y n al número total de casos posibles, entonces:

$$P(A) = \frac{n_a}{n}$$

Observamos que: $0 \leq n_a \leq n$, de donde:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Es decir, la probabilidad es un número real comprendido entre 0 y 1, inclusive.

La probabilidad del suceso imposible θ es 0 y la probabilidad del suceso seguro S es 1.

Probabilidad Frecuencial o "A Priori"

Supongamos que lanzamos una moneda al aire diez veces y que en seis lanzamientos obtenemos "cara", entonces la razón entre el número de caras y el número de lanzamientos será: $\frac{6}{10}$ = 0,6 A esta razón se le llama frecuencia relativa.

Luego el espacio muestral al lanzar dos dados es T x T = {(P, P), (P, I), (I, P), (I, I)}.

Así, tenemos tres casos favorables para números pares de un total de cuatro casos posibles.

Luego la probabilidad buscada es $\frac{3}{4}$.

EVALUACIÓN

1. Las letras M, A, T, I, C, O y los dígitos 1,9. 9, 0; se rotan cíclicamente como sigue

	MATICO	1990
1.	ATICOM	9901
2.	TICOMA	9019
3.	ICOMAT	0199

Cuál será el número del renglón en que aparecerá MATICO 1990 por primera vez:

A. 6
B. 10
C. 12
D. 18

El siguiente cuadro muestra una parte de una carrera de carros para aficionados, donde se muestran el número del carro, el tiempo por vuelta y la velocidad por vuelta.

Llamaremos frecuencia relativa a la razón entre el número de veces que ha ocurrido un evento y el número de veces que se ha experimentado.

Siguiendo con el experimento del lanzamiento de la moneda, si en 100 lanzamientos ha salido 54 veces cara, entonces la frecuencia relativa es $\frac{54}{100} = 0{,}54$. Si en 1.000 lanzamientos ha salido 585 veces cara, entonces la frecuencia relativa es $\frac{585}{1000} = 0{,}585$.

La idea es que al aumentar el número de lanzamientos, dicha razón tiende a estabilizarse en torno al $\frac{1}{2}$ valor (ley de los grandes números).

Probabilidad frecuencial o "a priori" es el límite (en el sentido estadístico) de la frecuencia relativa cuando el número de observaciones es suficientemente grande. Esto se anota así:

$$p = \lim_{n\to\infty} f_i = \lim_{n\to\infty} \frac{n_1}{n}$$

Ejemplo:

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados normales se obtengan al menos un número par?

Solución:

La manera tradicional de resolver este ejercicio es describiendo el espacio muestral y enseguida determinar el conjunto de casos favorables versus el conjunto de casos posibles.

En este caso particular, en vez de escribir el típico espacio muestral de 6 elementos, S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, pensemos que, al ser todos los elementos pares o impares, podemos reducir el espacio muestral al conjunto T = {P, I}, en donde P corresponde a los pares (2, 4, 6) el corresponde a los impares (1, 3, 5).

No. Del carro	Tiempo (Seg)	Velocidad (m/s)
4	10	150
6	6	250
3	15	100
1	20	75
6	8	187,5
2	19	78,9
3	16	93,8
6	5	300
4	12	125
6	6,5	2308
1	2,2	68,2
6	20	75

2. Observando la tabla, ¿Se podría afirmar que el promedio de tiempo por vuelta de todos los carros es 13.29 segundos?

A. No, porque para esto es necesario tener en cuenta todos los datos del tiempo.
B. Sí, pues se obtuvo sumando todos los tiempos y dividiendo el resultado entre el número de datos.
C. No, pues no corresponde a un porcentaje alto de vueltas de los carros.
D. Sí, porque este valor corresponde a un tiempo medio por cada vuelta.

3. Observando la tabla de la situación anterior para poder determinar la moda de las vueltas de cada carro se debe:

A. Coger aquel al que se le haya tomado el tiempo menos cantidad de veces.
B. Sumar la cantidad de veces que se tomó el tiempo a cada carro y tomar el resultado mayor.
C. Se debe completar la tabla con una columna que especifique la frecuencia absoluta de cada carro y tomar el de mayor frecuencia.
D. Contar el total de veces que se tomó el tiempo a cada carro y tomar el de más veces.

4. En una urna se mezclan 10 fichas rojas; 15 fichas azules y 25 fichas amarillas. Si seleccionamos una ficha al azar, entonces:

A. La mayor probabilidad es que sea roja.
B. La menor probabilidad es que sea azul.
C. La probabilidad que sea amarilla es del 50%.
D. La probabilidad que no sea de ningún color es del 10%.

5. El siguiente cuadro muestra una parte de una carrera de carros para aficionados, donde se muestran el número del carro, el tiempo por vuelta y la velocidad por vuelta

No. Del carro	Tiempo (Seg)	Velocidad (m/s)
4	10	150
6	6	250
3	15	100
1	20	75
6	8	187,5
2	19	78,9
3	16	93,8
6	5	300
4	12	125
6	6,5	2308
1	2,2	68,2
6	20	75

Queriendo establecer la frecuencia relativa del carro No. 4, se determina que es 0.4166…, lo que es cierto porque:

A. Coincide con el valor medio de las vueltas dadas por cada carro.

B. Al sumar éstas a las fracciones relativas de los otros carros, el resultado aproximado debe ser igual a la unidad.
C. Corresponde a dividir el número de vueltas de este carro entre el número total de vueltas.
D. Corresponde a dividir la frecuencia absoluta de este carro y el número total de datos.

6. Se tiene la siguiente distribución de datos:

Xi	Fi	Xi Fi
3	1	3
4	3	12
5	6	
6	2	
7	3	

De la tabla mostrada, indicamos:

A. La media sería 5.
B. La moda es 4.
C. La media es 5.2
D. La mediana es 6.

7. Los alumnos del grado 11º de un colegio de la ciudad hicieron una encuesta para determinar si hay preferencia o no por su uniforme. La tabla siguiente muestra los resultados de dicha encuesta:

	Profesores	Alumnos 7º	Alumnos 8º	Alumnos 9º	Alumnos 10º	TOTAL
Opinaron a favor	11	20	11	15	10	67
Opinaron en contra	4	41	56	62	43	206
No opinaron	5	22	18	4	16	65
TOTAL	20	83	85	81	69	338

Es correcto afirmar que 42 estudiantes que opinaron a favor y no opinaron son del grado 7º, porque:

A. De los 83 estudiantes de este grado, 41 opinaron en contra.
B. Solamente 20 estudiantes, opinaron a favor del uniforme.

C. De la totalidad de alumnos de este grado, 22 no opinaron.
D. 20 alumnos opinaron a favor y 22 no opinaron.

Dentro de las medidas de seguridad de cierta empresa se tiene, que al salir el personal se debe someter a una requisa, si de una bolsa saca una bola negra, pero si saca una bola blanca puede salir sin problema. En la bolsa hay seis bolas negras y cuatro blancas.

8. El guarda de portería se le olvida meter dentro de la bolsa la bola negra que sacó una empleada al salir, entonces:

A. La probabilidad de obtener una bola negra sigue siendo de 3 a 5.
B. La probabilidad de no ser requisado aumenta.
C. Cuando otro empleado vaya a salir, tiene más probabilidad de ser requisado.
D. La probabilidad de cada bola, independientemente del color, sigue siendo la misma.

9. Como el portero es muy distraído, se le ha olvidado meter a la bolsa una bola negra y otra blanca que han sacado dos empleados que ya salieron de la empresa. Por tanto podemos decir que:

A. La probabilidad de ser requisado aumenta y la de no serlo disminuye, puesto que no reponer la bola blanca represente una pérdida de la probabilidad en 1/4 parte, mientras que la negra representa 1/6.

B. Las probabilidades se mantienen igual, ya que se está sacando de cada color la misma cantidad, y esto representa una pérdida igual en sus posibilidades.
B. Ambas probabilidades aumentan, porque hay menos bolas para escoger.
C. La probabilidad de sacar una bola blanca aumenta y de una bola negra disminuye, porque hay mayor proporción de bolas negras que de blancas.

HOJA DE RESPUESTAS

Asignatura: Matemática

UNIDAD Nº 1

1	a	b	**c**	d
2	a	b	c	**d**
3	a	b	**c**	d
4	a	b	**c**	d
5	a	b	c	**d**
6	a	b	c	**d**
7	a	b	**c**	d
8	a	b	**c**	d
9	a	b	**c**	d
10	a	b	**c**	d
11	a	b	c	d
12	a	b	c	d
13	a	b	c	d
14	a	b	c	d
15	a	b	c	d
16	a	b	c	d
17	a	b	c	d
18	a	b	c	d
19	a	b	c	d
20	a	b	c	d
21	a	b	c	d
22	a	b	c	d
23	a	b	c	d
24	a	b	c	d

UNIDAD Nº 2

1	**a**	b	c	d
2	a	**b**	c	d
3	a	**b**	c	d
4	a	**b**	c	d
5	a	b	c	**d**
6	**a**	b	c	d
7	a	b	c	**d**
8	a	b	**c**	d
9	**a**	b	c	d
10	a	b	**c**	d
11	a	b	c	d
12	a	b	c	d
13	a	b	c	d
14	a	b	c	d
15	a	b	c	d
16	a	b	c	d
17	a	b	c	d
18	a	b	c	d
19	a	b	c	d
20	a	b	c	d
21	a	b	c	d
22	a	b	c	d
23	a	b	c	d
24	a	b	c	d

UNIDAD Nº 3

1	a	b	c	**d**
2	a	b	**c**	d
3	a	b	**c**	d
4	a	b	c	**d**
5	a	b	**c**	d
6	a	**b**	c	d
7	a	b	c	d
8	a	b	c	d
9	a	b	c	d
10	a	b	c	d
11	a	b	c	d
12	a	b	c	d
13	a	b	c	d

EVALUACIÓN

1	a	b	**c**	d
2	**a**	b	c	d
3	**a**	b	c	d
4	a	b	**c**	d
5	**a**	b	c	d
6	**a**	b	c	d
7	a	**b**	c	d
8	**a**	b	c	d
9	a	**b**	c	d
10	a	b	c	d
11	a	b	c	d

UNIDAD Nº 4

1	a	b	**c**	d
2	**a**	b	c	d
3	a	**b**	c	d
4	a	**b**	c	d
5	**a**	b	c	d
6	a	b	**c**	d
7	a	b	c	d
8	a	**b**	c	d
9	**a**	b	c	d
10	a	**b**	c	d
11	a	b	c	**d**
12	a	**b**	c	d
13	a	b	**c**	d
14	**a**	b	c	d
15	a	**b**	c	d
16	a	b	c	**d**
17	a	b	c	d
18	a	**b**	c	d
19	a	**b**	c	d
20	a	b	c	**d**
21	**a**	b	c	d
22	a	b	c	**d**
23	a	b	c	**d**
24	**a**	b	c	d

UNIDAD Nº 5

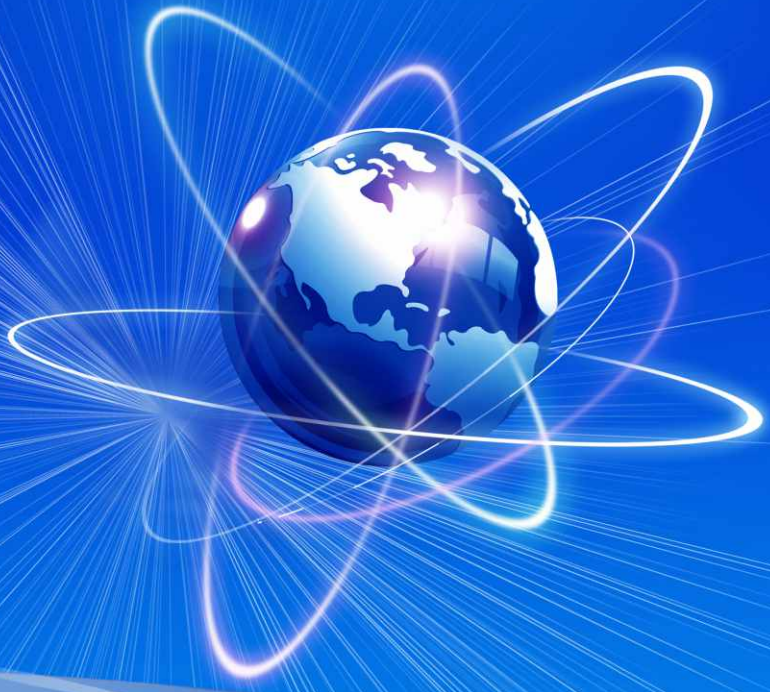
1	a	**b**	c	d
2	**a**	b	c	d
3	a	**b**	c	d
4	a	**b**	c	d
5	**a**	b	c	d
6	a	**b**	c	d
7	a	**b**	c	d
8	a	**b**	c	d
9	a	**b**	c	d
10	a	b	**c**	d
11	a	b	c	d
12	a	b	c	d
13	a	b	c	d
14	a	b	c	d
15	a	b	c	d
16	a	b	c	d
17	a	b	c	d
18	a	b	c	d
19	a	b	c	d
20	a	b	c	d
21	a	b	c	d
22	a	b	c	d
23	a	b	c	d
24	a	b	c	d

UNIDAD Nº 6

1	a	b	**c**	d
2	a	**b**	c	d
3	a	b	**c**	d
4	a	b	c	**d**
5	a	b	**c**	d
6	a	b	**c**	d
7	**a**	b	c	d
8	a	**b**	c	d
9	**a**	b	c	d
10	a	b	c	d
11	a	b	c	d
12	a	b	c	d
13	a	b	c	d
14	a	b	c	d
15	a	b	c	d
16	a	b	c	d
17	a	b	c	d
18	a	b	c	d
19	a	b	c	d
20	a	b	c	d
21	a	b	c	d
22	a	b	c	d
23	a	b	c	d
24	a	b	c	d

Este libro se termino de diseñar en las instalaciones de
Digital Reading
Calle 8f # 50 a - 63 B/ La Carolina
PBX.: 378 12 17
Cali - Colombia

CORPORACION

GIQ

En GIQ tu futuro es nuestro compromiso